Universidad Nacional de Río Negro
Sede Alto Valle y Valle Medio

CICLO DE INICIO UNIVERSITARIO 2020

MATEMÁTICA

Arquitectura
Diseño de Interiores y Mobiliario

—

Escuela de Arquitectura, Arte y Diseño

Bienvenidos a la Universidad Nacional de Río Negro!!

Con esta primera parte del cuadernillo de Matemática y Física, vamos a repasar conceptos matemáticos que han visto, o no, en la escuela secundaria y que son necesarios para el desarrollo de algunas de las asignaturas de las carreras de Arquitectura y Diseño de Interiores y Mobiliario.

Todos nosotros contamos con una caja de herramientas que armamos durante la escolaridad previa al ingreso a la universidad, ahora es el momento de recuperar esas herramientas y saber cuándo podemos utilizarlas, cuál resulta más económica que otra a la hora de resolver un problema.

En nuestros encuentros, vamos a tratar de "hacer matemática"…sí, leíste bien, vamos a experimentar lo que vive un matemático a la hora de enfrentarse a un problema que necesita solución.

Para ello, necesitamos dedicación, esfuerzo, constancia, no bajar los brazos ante la primera dificultad, alegría y actitud positiva.

Te propongo afrontar cada actividad con el desafío de resolverla, con las herramientas que conozcas, lo único que no podés usar es la frase: "*no puedo con esto"*, estamos para guiarte en este camino y ese es también nuestro desafío.

Adelante!!

> *"Todos nosotros sabemos algo. Todos nosotros ignoramos algo. Por eso, aprendemos siempre"*
>
> Paulo Freire

Profesoras:

Claudia Garelik, María Victoria Pistonesi, María Pía Martinez, Emiliana Llorens, María Silveria López

Índice

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS: un poco de historia…

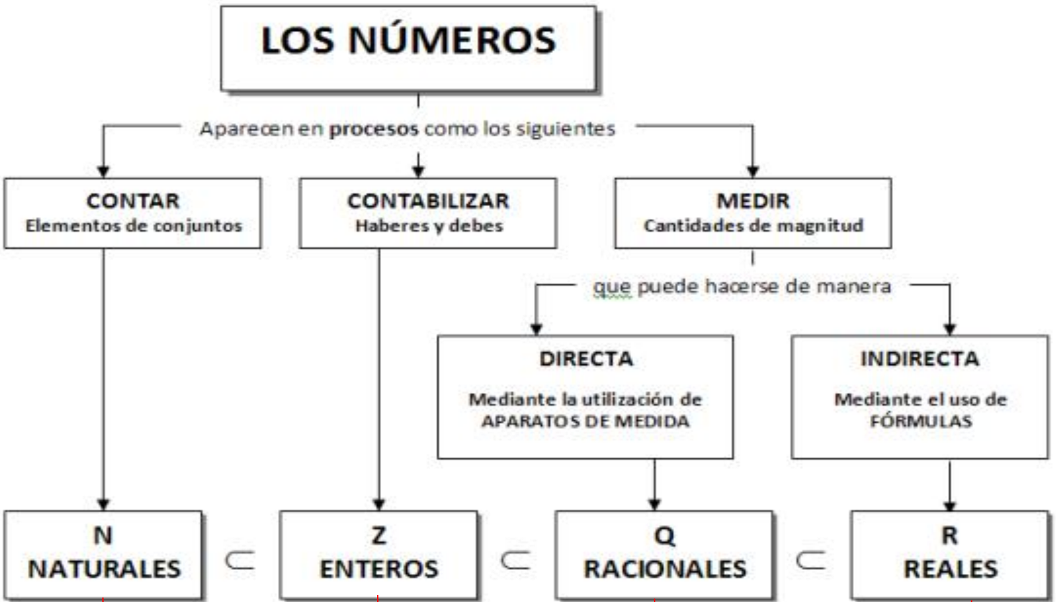
Al comienzo de la historia, el hombre solo aceptaba los **números naturales**

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5, \ldots.\}$$

debido a que eran los adecuados para *contar objetos* que se consideraban como unidades: 2 niños, 5 vacas, etc. Pero al *medir magnitudes* tales como la longitud o el peso, fueron imprescindibles las **fracciones**, los egipcios y babilónicos elaboraron métodos para operar con ellas. En realidad las fracciones son cocientes o razones entre números enteros, pero los griegos descubrieron que habían cantidades que no se podían expresar como cociente de enteros, la primera que se descubrió fue $\sqrt{2}$ (número que multiplicado pos sí mismo da 2), y como no se puede expresar como un cociente o razón, es un **número irracional.**

Los griegos no aceptaban que hubiera números menores que cero, *"¿cómo puede haber algo que sea menos que nada?"*, para ellos la ecuación $x + 5 = 3$ no tenía solución *"si se le suma* 5 *al número más pequeño (es decir al* 0*) la suma que se obtiene vale* 5 *y si se suma* 5 *a cualquier otro número (que será mayor que* 0*) obtendrá una suma mayor que* 5*"*. El primer matemático que destruyó este tabú fue el italiano Cardano. Después de todo puede haber algo menos que nada, una deuda es menos que nada. Dichos números son los **negativos**, que proviene de "negar", que se relaciona con la negativa de los griegos a aceptar que existían estos números.

En la práctica, la inclusión de los números negativos simplifica operaciones, por ejemplo, en contabilidad; y desde el punto de vista teórico, su existencia significa que toda suma de números tiene exactamente un resultado.

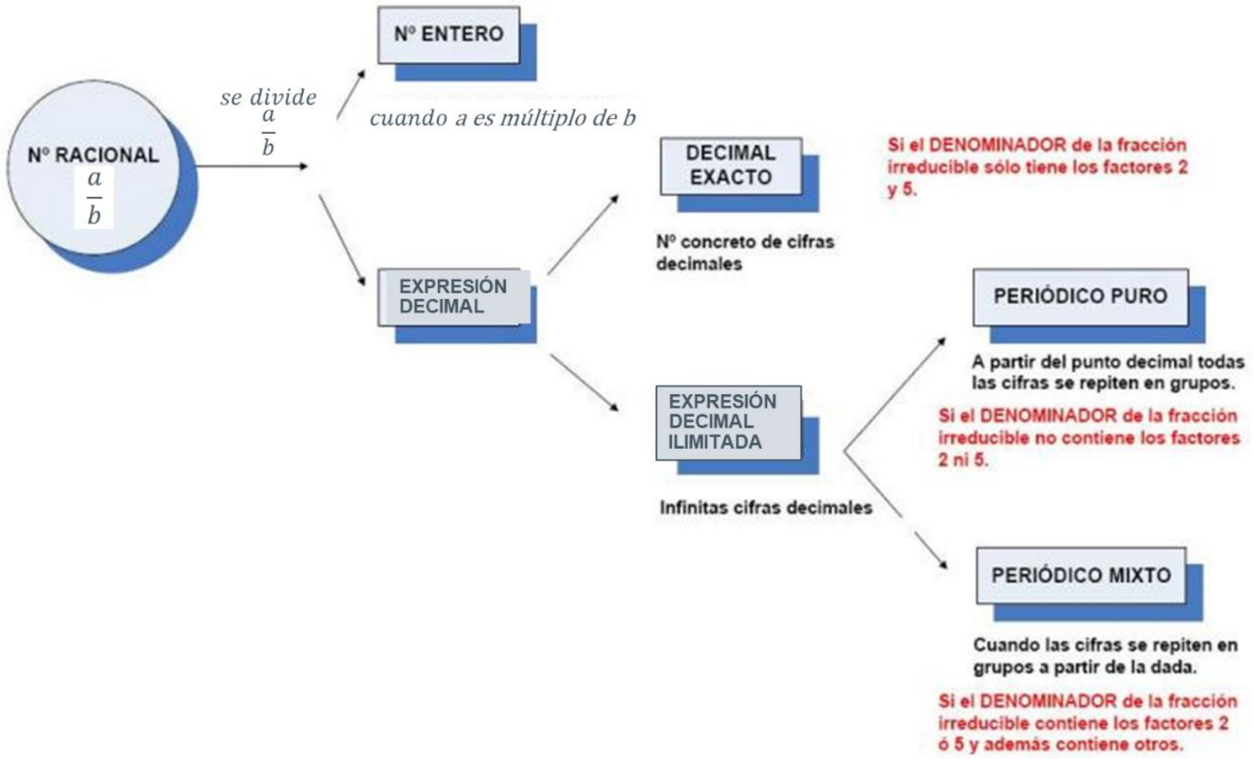


$\{1,2,3,4,5, \ldots\}$ $\{\ldots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \ldots\}$ $\left\{\frac{a}{b} \text{ con } a \in \mathbb{Z}, \; b \in \mathbb{Z}, \; b \neq 0\right\}$

$\{\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \; e, \; \sqrt[3]{5}, \ldots\} \cup \mathrm{Q}$

En las antiguas civilizaciones, los números naturales resultaron insuficientes para la medición de terrenos por ejemplo, ya que no siempre eran “enteros”, así surgen las **fracciones**. La reunión de los números naturales, los números enteros y las fracciones forman los **números racionales**.

Llamamos *razón* a la división indicada entre dos números enteros, que es una fracción. Se utilizan para expresar el reparto de cantidades, de mediciones, relaciones entre las partes de una totalidad, para indicar un porcentaje, etc.



Las fracciones y las expresiones decimales representan a los mismos números, pero tienen distintas reglas. Por ejemplo, para ordenar expresiones decimales se necesita ver su valor posicional, para las fracciones se requiere ver si son mayores o menores que un entero, qué relación tienen entre el numerador y el denominador, buscar fracciones equivalentes, etc.

Ejemplo:

Ordenar de menor a mayor los siguientes números: $\frac{6}{8}$ $\quad 0{,}7$ $\frac{72}{100}$ $\frac{9}{4}$ $\frac{4}{5}$

$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$ $\qquad 0{,}7=\frac{7}{10}=\frac{70}{100}$ $\frac{9}{4}=\frac{225}{100}$ $\frac{4}{5}=\frac{80}{100}$

Ahora que tenemos fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador, podemos compararlas entre ellas y ordenarlas de menor a mayor

$$\begin{array}{ccccc} \frac{70}{100} & \frac{72}{100} & \frac{75}{100} & \frac{80}{100} & \frac{225}{100} \\ 0{,}7 & \frac{72}{100} & \frac{6}{8} & \frac{4}{5} & \frac{9}{4} \end{array}$$

Un caso particular del uso de los racionales es como relación entre partes cuando las fracciones tienen denominador 100, a las que denominamos *porcentaje*.

Ejemplo:

$20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20$ $\qquad$ $0{,}8\% = \frac{0{,}8}{100} = \frac{8}{1000} = 0{,}008$

Los porcentajes se utilizan para representar una relación entre partes.

Ejemplo:

Calcular el 45% de 63.

Una forma de calcularlo es 63.45% = 63.0,45 = 28,35

Otra forma 100%---------63

45%----------x=$\frac{45.63}{100} = \frac{45}{100}.63 = 0{,}45.63 = 28{,}35$

¿Todos los números pueden expresarse como una razón entre dos enteros?

Leamos fragmentos de un artículo de Leonardo Moledo, titulado “El terror del teorema de Pitágoras”, publicado en el diario *Página 12*, el 17 de diciembre de 1999.

Pitágoras es un personaje misterioso y se sabe muy poco de él: se conjetura que nació en la isla de Samos, cerca de Mileto, tan luego, hacia la mitad del siglo VI (a. de C.) y que luego se trasladó a Crotona, en los territorios griegos del sur de Italia.

El asunto es que la figura de Pitágoras está rodeada por la leyenda, porque la escuela pitagórica funcionaba como una secta mística y hermética, como un grupo mancomunado por creencias y prácticas religiosas (…).

Los pitagóricos rechazaron los fenómenos y el “discurso de las cosas”. A la pregunta ¿cuál es el origen de las cosas?, respondieron: los números.

(…) Incluso se pasaron un poco de rosca: identificaron a la Justicia con el número 4 por tratarse del primer número cuadrado; al matrimonio con el 5, que representaba la unión del macho (3) con la hembra (2). Pero además analizaron muchas propiedades de los números y trabajaron sobre los poliedros regulares, las medias aritméticas, geométricas y armónicas.

(…) Naturalmente, la gran gloria de la escuela es el famoso e inmortal “teorema de Pitágoras”, que establece que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, una relación que no es para nada evidente, y que, a primera vista, no tendría por qué suceder (la relación, sin embargo, era conocida por los matemáticos babilonios y egipcios, y aplicada por los albañiles para construir ángulos rectos).

Sin embargo, ese mismo teorema los llevó a tropezar con un obstáculo catastrófico, letal: si construimos un cuadrado de lado 1 y aplicamos el teorema de Pitágoras, su diagonal mide raíz cuadrada de 2.

Y la raíz cuadrada de dos no correspondía a ningún número, a ninguna fracción que los pitagóricos pudieran imaginar. La raíz de 2 es inexpresable, no se puede decir, no es un número.

La raíz cuadrada de dos produjo verdadero terror entre los pitagóricos: ellos suponían que todo consiste en números y que el conocimiento expresa relaciones entre números (enteros o fraccionarios). Pero he aquí que una entidad, que ciertamente pertenece a la ciencia, la diagonal de un cuadrado, no puede ser expresada con números enteros. Nada, no puede existir. Es decir, tenemos algo concreto y ese segmento, que está ahí, no es un número, no es nada. Y la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 tampoco es nada. No existe. ¡Pero la diagonal de ese cuadrado está ahí! ¿Cómo puede ser que a un segmento no corresponda ninguna longitud?

Un ejemplo del terror que produjo ver que algo tan simple como la raíz cuadrada de 2 era un irracional es la leyenda según la cual un pitagórico, Hipaso, divulgó el secreto y pereció ahogado como castigo divino por su acción. Y es que el problema con que se enfrentaron no es fácil de resolver, la raíz de 2, como descubrieron los pitagóricos, desde ya no es una fracción: no hay número entero ni fraccionario alguno que multiplicado por sí mismo nos reproduzca exactamente al 2. Actualmente escribimos raíz cuadrada de 2 como 1,14142135624 y agregamos una serie de puntos suspensivos que significan que la fracción decimal no tiene fin, que el número de decimales (no periódicos) es infinito. Es lo que ahora llamamos (quizás en homenaje a Pitágoras) un número irracional.

Construyeron todo un edificio científico, místico, que les parecía muy sólido y de repente aparece este asunto que amenaza con precipitar toda la escuela en el abismo. Los pitagóricos se enfrentan a este dilema y no lo pueden resolver. Han fracasado. ¿Y entonces? El terreno del pensamiento parecía seguro, sin la engañosa cualidad de los sentidos. ¡Y ahora resultaba que no era tan seguro! ¿Entonces habrá que recurrir nuevamente a los dioses? No. Pero, indudablemente, era necesario tomar otro camino. El propio teorema, fruto dorado de la escuela, la precipitó en el abismo.

El **número irracional** es aquel que tiene un número de decimales no periódicos infinitos. Esto hace que estos números no puedan obtenerse como la razón entre dos números enteros, es decir, no son racionales, por eso recibieron el nombre de irracionales y con ellos se representan las medidas inconmensurables.

Estos nuevos números dieron lugar a formar el conjunto de los **números reales**, que se considera la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales.

$$\mathbb{R} \quad \text{Reales} \begin{cases} \mathbb{Q} \quad \text{Racionales} \begin{cases} \mathbb{Z} \quad \text{Enteros} \begin{cases} \mathbb{N} & \text{Naturales} \\ \mathbf{0} & \text{Cero} \\ & \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \phantom{\mathbb{Z} \quad} \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \phantom{\mathbb{Q} \quad} \text{Irracionales} \end{cases}$$

Números naturales ($\mathbb{N}$)
Están ordenados en una sucesión 1,2,3, … , *n*, *n*+1, … y se lo suele representar como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Este conjunto tiene *primer elemento* que es el 1 y además todo elemento tiene su siguiente, es decir, dado un número natural *n* podemos asegurar que su siguiente (*n*+1) también es un número natural.

En $\mathbb{N}$ están definidas dos operaciones *suma* y *producto.* La suma es una operación cerrada en $\mathbb{N}$, es decir para todo par de números naturales *a* y *b* se verifica que su suma también es un número natural. Simbólicamente:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b \in \mathbb{N}$$

Análogamente el producto es una operación cerrada en $\mathbb{N}$, es decir :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}: ab \in \mathbb{N}$$

Observemos que la ecuación $x + 7 = 2$ no tiene solución en este conjunto. Esta limitación es la que conduce a ampliar el conjunto de los números naturales.

Observación: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Números enteros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- \cup \{0\} \quad \text{siendo } \mathbb{N}^- = \{x \in \mathbb{Z} / -x \in \mathbb{N}\}$$

Los números enteros positivos son los naturales.

Los números enteros negativos son los opuestos de los naturales, se simboliza $\mathbb{N}^-$.

Ejemplo:

-2 es el opuesto de 2

3 es el opuesto de -3

Recordemos que número *primo* es todo número entero *p* $\neq \pm 1$, cuyos únicos divisores son $\pm p$, $\pm$ 1.

Ejemplo:

2, 3, 7, 17, 31, 23, etc.

Todo número entero distinto de 0, 1, -1 se puede escribir como producto de *enteros primos positivos* multiplicados por $\pm$ 1 y ésta descomposición es única, salvo el orden de los factores.

Ejemplos:

$-10 = (-1) \cdot 2 \cdot 5$

$-36 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3^2$

Observaciones

1) Se llaman números enteros *pares:*$\{x/\ x=2k,\ k\ \in \mathbb{Z}\}$

2) Se llaman números enteros *impares*:$\{x/\ x=2k\pm 1,\ k\ \in \mathbb{Z}\}$

3) Se llaman números enteros *múltiplos de 3*: $\{x/\ x=3k,\ k\ \in \mathbb{Z}\}$

4) El cociente entre dos números enteros no es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$.

Ejemplo:

$$2:4=\frac{1}{2}\quad \text{y}\quad \frac{1}{2}\notin \mathbb{Z}$$

Esta limitación es la que conduce a ampliar el conjunto de los números enteros para que la operación división por un divisor no nulo siempre sea posible.

Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Dados dos números enteros cualesquiera, *a* y *b*, con *b* ≠ 0, el cociente entre *a* y *b*, $\frac{a}{b}$, es un número racional. Ala valor de *a* se lo denomina *numerador* y al valor de *b*, *denominador.* Se simboliza

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a,b\ \in \mathbb{Z}\ y\ b\neq 0\right\}$$

Operaciones

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Propiedades

1- Un número racional se puede expresar como cociente de distintos pares de números enteros de tal manera que:$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$ siendo *a, b, c, d*$\in\mathbb{Z}$ y *b* $\neq$ 0 y *d* $\neq$ 0.

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{7}{14}$$

2- Todo número racional *x* tiene una única representación como fracción irreducible[1] con denominador positivo.

Ejemplos:

$$\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}\quad ;\quad \frac{-9}{18}=-\frac{1}{2}\quad ;\quad \frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$$

[1] $\frac{a}{b}$ se dice irreducible si *a* y *b* no tienen factores comunes distintos de ± 1

3- Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son cerradas en $\mathbb{Q}$[2].

4-Todo número racional $q \neq 0$ tiene inverso multiplicativo, es decir:

$$\forall\, q \in \mathbb{Q}\,, q \neq 0 \text{ existe } q^{-1} \in \mathbb{Q} \text{ tal que } q \cdot q^{-1} = 1\,, \text{siendo } \; q^{-1} = \frac{1}{q}$$

Ejemplos:

Si $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ podemos decir que: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ y $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

5- Todo número racional $\frac{a}{b}$ se puede expresar en forma decimal de la siguiente manera:

- Como una *expresión decimal finita* si al dividir *a* por *b* se llega a un resto cero.

  Ejemplo:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375 \qquad \frac{1}{2} = 0{,}5$$

- Como una *expresión decimal periódica* si al dividir *a* por *b* no se obtiene nunca un resto cero, pues los sucesivos restos son todos menores que *b*, llega un momento en que uno se repite y a partir de él se repiten las cifras del cociente.

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots = 1{,}\widehat{3} \; \frac{1}{7} = 0{,}142828\ldots = 0{,}14\widehat{28}$$

Son entonces números racionales por ejemplo:

$$2;\ \frac{1}{2} = 0{,}5 \ ; \ -\frac{3}{4} = -0{,}75 \ ; \ \frac{2}{9} = 0{,}\widehat{2}$$

Se puede afirmar que entre dos números racionales distintos existen infinitos números racionales. Esta propiedad de los números racionales permite decir que el conjunto $\mathbb{Q}$ es *denso*.

Se podría pensar que el conjunto de los números racionales comprende a todos los puntos de la recta real, pero no es así ya que existen expresiones decimales infinitas, no periódicos, llamados **Irracionales** ($\mathbb{I}$) como por ejemplo $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$, que no pertenecen a $\mathbb{Q}$ y que se identifican con puntos de la recta real. Los números irracionales no se pueden expresar como cociente de dos enteros.

La unión de los racionales con los irracionales determina el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Números Reales ($\mathbb{R}$)

Todo número real puede expresarse en forma decimal:

---

[2] La división es cerrada con la restricción de divisor no nulo.

a) Si el número real es *racional*, su *expresión decimal* tiene un número finito de cifras decimales o tiene infinitas cifras decimales periódicas.

b) Si el número real es *irracional*, su *expresión decimal* tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Expresión aproximada de un número real

En algunos casos, al operar con números que tienen expresiones decimales infinitas, se utilizan aproximaciones de los mismos.

Por ejemplo, al utilizar el número π= 3,14159265…, se pueden considerar aproximaciones al diezmilésimo, es decir con cuatro cifras decimales, por truncamiento o por redondeo.

Aproximaciones por truncamiento: se eliminan todas las cifras decimales a partir de la quinta, y se obtiene así: π = 3,1415.

Aproximaciones por redondeo: se eliminan todas las cifras a partir de la quinta, pero como la sexta cifra es 9 y 9 es mayor que 5, se aumenta en una unidad a la última cifra conservada:

5+1=6; luego se obtiene π = 3,1416.

Conclusión:

Aproximación por truncamiento: a una cifra determinada consiste en eliminar las cifras que le siguen.

Aproximación por redondeo:

- Consiste en aumentar en una unidad la última cifra conservada, si la primera cifra a eliminar es igual o mayor que 5.
- Consiste en truncar directamente el número a la cantidad de cifras deseadas, si la primera cifra eliminada es menor que 5.

En $\mathbb{R}$ están definidas dos operaciones: *suma* y *producto.* Dichas operaciones se dicen cerradas, porque a partir de dos números reales operándolos con la suma o el producto se obtiene otro número real.

ACTIVIDAD 1

a) Marcar con una cruz los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número y con un guion aquéllos a los que no pertenece.

	N	Z	Q	I	R
$\sqrt{2}$					
-8					
$-\sqrt[3]{27}$					

$\mathbf{0,7\widehat{8}}$					
$\sqrt[3]{\mathbf{100}}$					
$\mathbf{0}$					
$\mathbf{6}$					
$\sqrt{-\mathbf{4}}$					
-8/7					
-3,188118811881…					
9,123					
$\dfrac{\mathbf{3+\sqrt{7}}}{\mathbf{2}}$					

b) Indicar cuales de las siguientes igualdades son válidas:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3} = 125$ b) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = -\frac{49}{9}$ c) $\sqrt{25+9} = 8$ d) $\sqrt[3]{2} * \sqrt[3]{32} = 4$

1

c) Resolver los siguientes cálculos

a) $4 \div \left(\frac{1}{3} + 2{,}5\right) - \frac{6}{5} \cdot \left(3 - \frac{4}{3}\right)$ b) $\frac{1}{3} - \frac{4}{3} : \left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{9}{5} + 1{,}2\right)$

d) Aplicar propiedades y realizar los cálculos:

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^{6} + \left(\frac{7}{5}\right)^{4} =$ b) $[(2)^{8} * (2)^{-3}]^{-1} =$ c) $\frac{\sqrt{14}*\sqrt{6}}{\sqrt{5}*\sqrt{15}} =$

d) $\left(5 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right) * \left(5 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) =$ e) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50}$

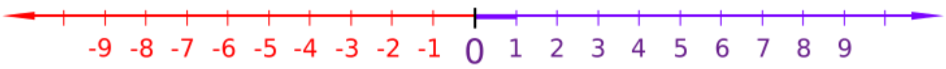
e) Unir con una flecha las expresiones de la primera y segunda columna que sean iguales.

$(x-y)^2$	$2\sqrt{2x}$
$(x+y)(x-y)$	$x.x$
x^2	$2\sqrt{x}$
$2x$	$x^2 - y^2$
$\sqrt{2x+2x}$	$x + x$
$\sqrt{2x} + \sqrt{2x}$	$x^2 + y^2 - 2xy$

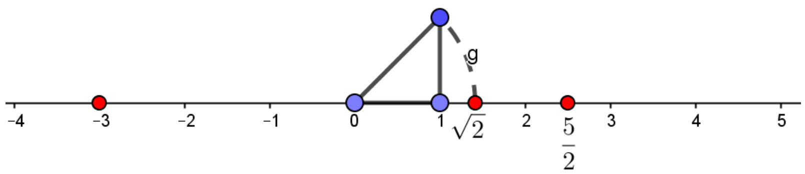
LA RECTA NUMÉRICA

La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional o línea recta, la cual contiene todos los números reales, es decir a cada número real le corresponde un punto en la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

En la recta numérica que se muestra a continuación, están representado los “números enteros” mayores o iguales que -9 y menores o iguales que 9.



En la siguiente recta numérica se representan los siguientes números reales: $\sqrt{2}, -3$ y $\frac{3}{2}$.



ACTIVIDAD 2

Representar en la recta numérica los siguientes números indicando a qué conjunto pertenece cada uno:

a) $-5;\ 2;\ -3;\ 8;\ 0$ b) $0,25; \frac{5}{10};\ \ 0,\widehat{3}; -3\frac{1}{4};\ \frac{3}{5};\ -2,\widehat{6};\ -\frac{8}{3}$

c) $\sqrt{5};\sqrt{8};\sqrt{9};\sqrt{3};\ \sqrt{18}$

ECUACIONES

Las ecuaciones permiten traducir enunciados del lenguaje cotidiano al lenguaje simbólico y son una herramienta importante para resolver problemas.

Una *ecuación* es una igualdad entre expresiones, en las que aparecen valores desconocidos denominados incógnitas.

Importante!! Al resolver una ecuación, cualquier operación que se realiza en un miembro de la igualdad, debe realizarse también en el otro.

Una *solución de una ecuación* es aquel número que sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera. Decimos que ese número satisface la ecuación.

Ecuaciones polinómicas

Son aquellas en las cuales los exponentes de la incógnita son números enteros positivos. El mayor exponente de la incógnita indica el grado de la ecuación (grado de la ecuación).

Denominación	Grado	Forma reducida
Lineal	1	$ax + b = 0 \quad con \quad a, b \in \mathbb{R} \ y \ a \neq 0$
Cuadrática	2	$ax^2 + bx + c = 0 \quad con \quad a, b, c \in \mathbb{R} \ y \ a \neq 0$

Cúbica	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad con \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \ y \ a \neq 0$

Para verificar el grado de una ecuación es necesario llevarla a la forma reducida.

Ejemplos:

1) $(x+1)^2 + 6 = x^2 - 10$ puede expresarse $2x + 17 = 0$ Ecuación lineal

2) $3z^2 - 4z = z^2 + z - 6$ puede expresarse $z^2 - 5z + 6 = 0$ Ecuación cuadrática

3) $y^4 - y^3 + 81y = y^4 - 3y^3 + 4$ puede expresarse $2y^3 + 81y - 4 = 0$ Ecuación cúbica

La cantidad de soluciones de la ecuación (denominadas *ceros o raíces* de la ecuación) es igual, a lo sumo, al grado de la ecuación.

1) Ecuaciones lineales

Son ecuaciones donde la variable o incógnita sólo aparece elevada a la primera potencia. Por ejemplo las de la forma: *ax*+ *b* = 0, *a* ≠0 con *a, b* reales.

Para resolver procedemos así:

$$ax + b = 0$$

$$ax + b - b = 0 - b$$

$$ax = -b$$

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(-b), \qquad a \neq 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ejemplos:

1) $-\frac{7}{4}x + 1 = x - 3$

$-\frac{7}{4}x - x = -3 - 1 = -4 \Leftrightarrow \frac{-7x-4x}{4} = -4$

$\frac{-11x}{4} = -4 \Leftrightarrow$ -11*x* =-16 ⇔11*x* =16 ⇔*x* = $\frac{16}{11}$ Sol = $\left\{\frac{16}{11}\right\}$

2) $2x + 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow$ 0*x* = - 8; absurdo, pues no existe *x* ∈ℝ tal que satisfaga la ecuación. Sol= ∅

3) $2x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow$ 0 *x* = 0 vale para todo *x* ∈ℝ Sol = ℝ.

2) Ecuaciones cuadráticas

Son ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

En general se resuelven con la siguiente fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos soluciones: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Si $b^2 - 4ac = 0$ tiene una solución doble: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Si $b^2 - 4ac < 0$ no tiene solución real.

Ejemplo:

$$x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0, -7\}$$

Para resolver esta ecuación cuadrática no es necesario utilizar la fórmula pues es posible expresarla como un producto igualado a 0 y, en el conjunto de los números reales, si un producto es igual a 0, significa que alguno de los factores de dicho producto es 0.

Propiedad: $a.b = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$

ACTIVIDAD 3

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{3}x + 4 = 5$ $\quad$ b) $3(x-1) = 6x$

c) $x^2 - 16 = 6$ $\quad$ d) $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+3} = 0$

e) $(2x+4)^2 = (x+3)^2$ $\quad$ f) $\frac{x+1}{(x+1)^2} + \frac{2x}{x+1} = -1$

g) $\frac{4x^3-3}{\sqrt{2}} + \sqrt{18}.\sqrt{2} = 6 + \sqrt{2}$

h) $\frac{2x}{3} = \frac{2}{8x}$ $\quad$ i) $\frac{7x-3}{2} = 2x - \frac{1}{2}$

2) Responder, justificando cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución, no la tienen o tienen infinitas.

a) $2x + 6 = 2(x+3)$ $\quad$ b) $2x + 4 = 2x - 1$ $\quad$ c) $3x + 2 = x + 1$

3) Plantear la ecuación y resolver los siguientes problemas:

a) En un terreno el largo es el cuádruple del ancho disminuido en 3 m. Si su perímetro es 96 m. ¿cuáles son sus dimensiones?

b) Una empresa de colocación de pisos flotantes debe colocar los mismos en un salón. A la mañana del primer día coloca $\frac{2}{7}$ del total, a la tarde $\frac{2}{5}$ del resto. Si todavía falta colocar 60 m^2 ¿cuántos m^2 tiene el piso del salón?

c) Se distribuyen 400 bolsas de cemento en tres obras diferentes. Sabiendo que la primera tiene 80 menos que la segunda y esta tiene 60 menos que la tercera, averigua cuántas bolsas tiene

d) Se necesita construir la vereda de una plaza rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho, ¿Qué ancho debe tener la misma si su área tiene que ser de 540 m2?

e) ¿Cuánto mide la arista de un recipiente cúbico si su volumen es 15.625 cm3?

PROPORCIONALIDAD

Comprender el concepto de proporcionalidad requiere comprender el concepto de razón.

Una *razón* es el cociente indicado entre dos cantidades. El valor de la razón es el cociente entre esas cantidades. Dadas dos cantidades a y b su razón es $\frac{a}{b}$.

Ejemplo:

La razón entre 8 y 4 es 2 porque $\frac{8}{4} = 2$

La razón entre 4 y 8 es $\frac{1}{2}$ porque $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

La razón indica "cuántas veces cabe la segunda cantidad en la primera", es decir, se establece una relación de tamaño entre ellas.

La *proporcionalidad* implica la comparación de razones. Cuando dos razones son iguales, se habla de proporcionalidad numérica $\frac{5}{10} = \frac{4}{8}$ y el valor de cada razón es igual a $\frac{1}{2}$. Se dice entonces que hay proporcionalidad entre ellas. Si las cantidades del numerador representan una magnitud, y las del denominador a otra magnitud, el valor de la razón es la *constante de proporcionalidad* y representa el valor por unidad.

Ejemplo

Para arreglar la fachada del frente de una casa, el costo por m^2 del arreglo es de $ 50.

m^2 de fachada	3	10	15		45,5	
Costo en $	150	500	750	50		1000

Las magnitudes que se relacionan son la superficie (m^2) de fachada con el costo de arreglo ($) por lo que en las razones, el numerador representa el costo y el denominador la cantidad de m^2.

$$\frac{150}{3} = \frac{500}{10} = \frac{750}{15} = 50$$

Como las razones son iguales y su valor es 50, la constante de proporcionalidad es 50, lo que significa que estas magnitudes son directamente proporcionales.

"Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre dos cantidades correspondientes es constante, por eso se llama constante de proporcionalidad".

Simbólicamente se expresa:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{siendo} \quad k \text{ la constante de proporcionalidad}$$

Ejemplo

Para construir un camino con ladrillo con junta se utilizan 18 ladrillos cada 2 m de camino

Longitud del camino (m)	2	5	10
Cantidad de ladrillos	18	45	90

La proporcionalidad es directa porque $\frac{18}{2} = \frac{45}{5} = \frac{90}{10} = 9$

¿Qué significa en el problema la constante de proporcionalidad 9?

Como $\frac{18\ ladrillos}{2m} = \frac{45\ ladrillos}{5m} = \frac{90\ ladrillos}{10m} = 9\frac{ladrillos}{m}$

Por lo tanto se necesitan 9 ladrillos por m de camino.

(Ver Anexo I)

Aplicaciones de la proporcionalidad directa

Escala

A la correspondencia que se establece entre una longitud real y una representación de esa longitud (por ejemplo un mapa o un plano) se la llama **escala.** (Ver Anexo II)

$$E = \frac{representación\ de\ esa\ longitud}{longitud\ real}$$

Porcentaje

En matemáticas, el porcentaje es una forma de expresar un número como una fracción que tiene el número 100 como denominador. También se le llama comúnmente tanto por ciento, donde por ciento significa «de cada cien unidades». Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el tanto por ciento de una cantidad, donde tanto es un número, se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada cien de esa cantidad.

El porcentaje se denota utilizando el símbolo %, que matemáticamente equivale al factor 0,01 Por ejemplo, «treinta y dos por ciento» se representa mediante 32% y significa 'treinta y dos de cada cien'. También puede ser representado:

$32\ \% = 32\ .\ 0{,}01$

y, operando:$32\ \% = 0{,}32$

El 32% de 2000, significa la parte proporcional a 32 unidades de cada 100 de esas 2000, es decir:

$$32\ \%\ .\ 2000 = 0{,}32\ .2000 = 640$$

640 unidades en total.

El porcentaje se usa para comparar una fracción (que indica la relación entre dos cantidades) con otra, expresándolas mediante porcentajes para usar 100 como denominador común. Por ejemplo, si en un país hay 500 000 enfermos de gripe de un total de 10 millones de personas, y en otro hay 150 000 enfermos de un total de un millón de personas, resulta más claro expresar que en el primer país hay un 5 % de personas con gripe, y en el segundo hay un 15 %, resultando una proporción mayor en el segundo país.

El símbolo % es una forma estilizada de los dos ceros. Signos relacionados incluyen ‰ (por mil), que indican que un número se divide por mil.

ACTIVIDAD 4

a) Explicar cuáles de las siguientes parejas de magnitudes son directamente proporcionales.
   i. El número de lados de un polígono regular, cuyos lados miden 5 cm, y su perímetro.
   ii. La longitud de una palabra y el número de vocales que tiene.
   iii. El radio de una circunferencia y su longitud.

En aquéllos casos en que lo sean, indica la expresión que define a la constante de proporcionalidad.

b) Completar las siguientes tablas para que las magnitudes A y B sean directamente proporcionales.

A	8	10	25	
B		5		357

Proponer dos magnitudes que sean directamente proporcionales y verificar con un ejemplo numérico.

c) La cantidades de la siguiente tabla corresponden a longitudes en una escala 1:50. Completarla para que la relación entre la medida en la realidad y en el papel se correspondan con dicha escala.

REALIDAD	50			10
PAPEL	1	5	21	

d) Resolver
   II. Por la compra de 1000 ladrillos para una construcción me efectúan un 15% de descuento por pago en efectivo. ¿Cuánto abono al pagar en efectivo si el precio de los mismos es $9000?

III. En un terreno de 300m^2 se desea hacer una construcción, ¿hasta cuántos m^2 puede tener la misma si el municipio exige un 25% de espacio libre?

IV. La mezcla para un contrapiso se elabora utilizando determinada cantidad de baldes de cada material. Si una mezcla lleva 8 baldes de piedra, 37,5% de arena; 12,5% de cal y 6,25 % de cemento. ¿Cuántos baldes de cada material lleva?

EL PLANO COORDENADO

Es necesario conocer recursos para representar puntos y otros elementos geométricos en el plano.

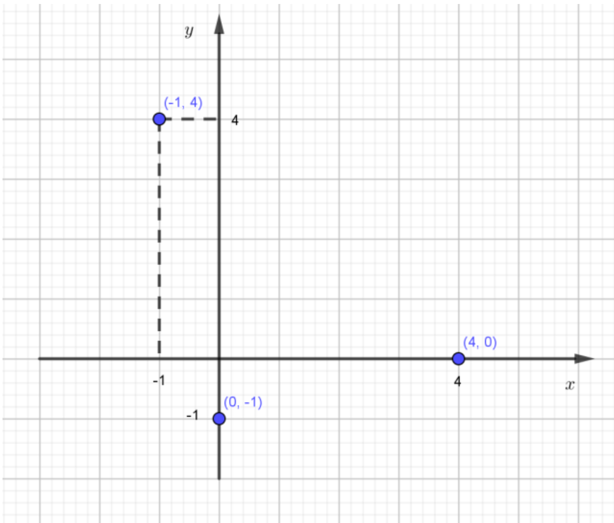
Se trabaja con el *sistema de ejes cartesianos* xy. Estos ejes son rectas numéricas reales, perpendiculares entre sí de manera que una recta es horizontal (el eje x) y la otra vertical (el eje y). El punto de intersección entre ellas determina el origen del sistema y corresponde al punto donde $x = 0$ e $y = 0$.

Los valores de x van creciendo hacia la derecha del origen y decrecen hacia la izquierda del mismo (valores de x negativos), mientras que los valores de y crecen hacia arriba del origen y decrecen hacia abajo del mismo (valores de y negativos).

Los puntos se representan, en el plano coordenado, por medio de *pares ordenados* (x, y). Se denominan así porque en dicho par, la primera coordenada corresponde al valor de x y la segunda coordenada corresponde al valor de y.

Ejemplo:

Graficar los puntos (-1,4) ; (0,-1) ; (4,0)



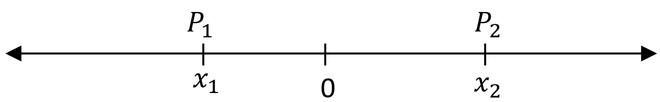
Distancia entre puntos del plano

1) En $\mathbb{R}$: la distancia entre dos puntos en un *sistema coordenado lineal* se calcula como el valor absoluto de la diferencia de abscisas.

Datos: $P_1 = (x_1), P_2 = (x_2)$

Incógnita: *d* = distancia entre P_1y P_2.

d = $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$



2) En $\mathbb{R}^2$: la distancia entre dos puntos en el plano, se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.

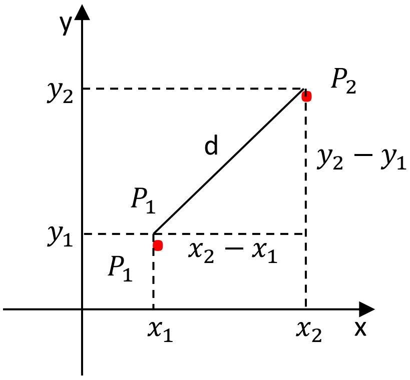
Datos: $P_1 = (x_1,\ y_1), P_2 = (x_2, y_2)$

Incógnita: *d* = distancia entre P_1y P_2.

Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ejemplo:

1) Determinar la distancia entre los puntos$P_1 = (3, -2{,}4)$ y $P_2 = (-1, -2{,}1)$.

Empleando la fórmula tenemos

$$d = \sqrt{(-1-3)^2 + \left(-2-(-2)\right)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2) Hallar el o los valores de *"a"* para que el punto(*a*,3) esté a cinco unidades del punto (-2,-1). Con el valor hallado graficar la situación.

La distancia entre dos puntos$P = (x_1, y_1)\ y\ Q = (x_2, y_2)$se expresa

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En nuestro problema $P = (a, 3)\ y\ Q = (-2, -1)$entonces

$$d = \sqrt{(-2-a)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

Resolviendo la ecuación planteada

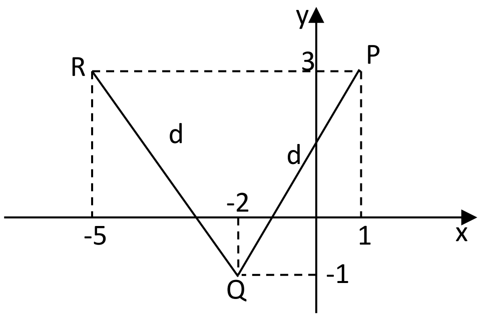
$$(-2-a)^2 + (-1-3)^2 = 25$$

$$4 + 4a + a^2 + 16 = 25$$

$$20 + 4a + a^2 = 25 \Longrightarrow a^2 + 4a - 5 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \nearrow & a_1 = 1 \\ \searrow & a_2 = -5 \end{matrix}$$

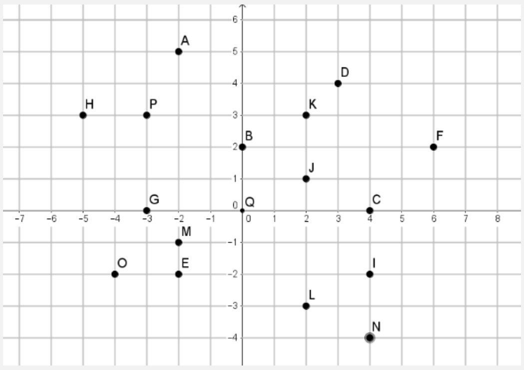
Es decir que existen dos puntos del plano de ordenada 3 cuya distancia a (-2,-1) es 5. Dichos puntos son *P*=(1,3) y *Q*=(-5,3).



ACTIVIDAD 4

1) Graficar los siguientes puntos del plano, en un mismo sistema de coordenadas:
A (3; 4) B (0; -2) C (-4; 5) D (0; 0) E (-9/2; 2)
F (2; $\sqrt{2}$)

2) Completar en el cuadro las coordenadas de los puntos marcados en la gráfica siguiente:



A	B
C	D
E	F
G	H
I	J
K	L
M	N
O	P
Q	///

3) Determinar la distancia entre los puntos que se dan a continuación:

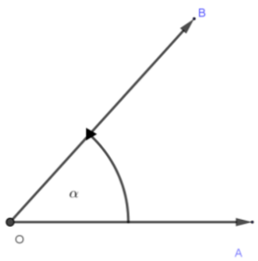
Graficar cada caso e indica a qué subconjunto de los números Reales pertenece el resultado.

i- (- 4;3$\sqrt{2}$) y (3;$\sqrt{2}$)
ii- (-1;2) y (-3;1/2)
iii- (-3;6) y (1;-1)

NOCIONES BÁSICAS DE TRIGONOMETRÍA

Ángulos y sistemas de medición de ángulos

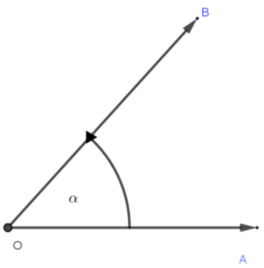
Consideremos en el plano un punto *O* y dos semirrectas con origen en dicho punto.

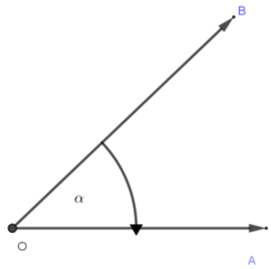


Todo ángulo se considera generado por una semirrecta móvil que gira sobre su origen, supuesto fijo. Llamamos ángulo orientado $\widehat{AOB}$ al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario por las agujas del reloj, de la semirrecta *OA* hacia la posición de la semirrecta *OB*.

Como observamos en la figura, $\hat{\alpha}$ resulta generado por la semirrecta *OA* cuando gira sobre su origen y ocupa la posición final *OB*.

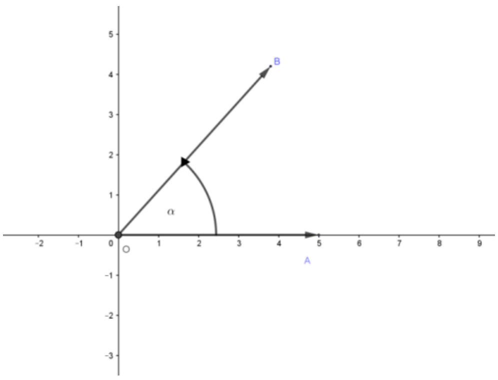
Un ángulo se define con signo positivo si es generado por una semirrecta móvil que gira en sentido opuesto al movimiento de las agujas de un reloj. En caso contrario, se define como negativo.

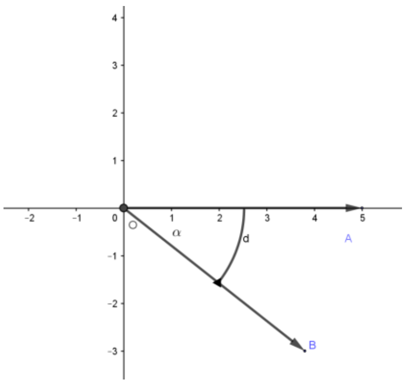




$\alpha > 0$ $\qquad\qquad$ $\alpha < 0$

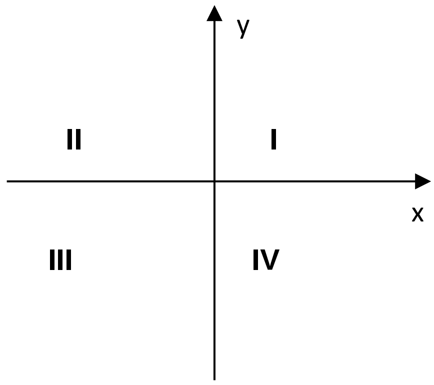
Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de centro *O*, llamamos ángulo centrado a todo ángulo orientado con vértice en *O*, cuya semirrecta inicial coincida con el semieje positivo de las abscisas.





Observación

Los ejes *x* e *y* dividen al plano en cuatro cuadrantes.



Sistemas de medición de ángulos

Trabajaremos con dos sistemas de medición: sexagesimal y circular o radial.

Sistema Sexagesimal

Su unidad de medida es el grado sexagesimal (1 º) que se obtiene si se divide al ángulo recto en 90 partes congruentes:

$$1^\circ = \frac{1R}{90}$$ 1 recto = 90 grados ó 1 R = 90°

Si al grado se lo divide en 60 partes iguales se obtiene el minuto sexagesimal:

$$1' = \frac{1^\circ}{60}$$ 1 grado = 60 minutos ó 1° = 60’

Si al minuto se lo divide en 60 partes iguales se obtiene el segundo sexagesimal :

$$1'' = \frac{1'}{60}$$ 1 minuto = 60 segundos ó 1’ = 60’’

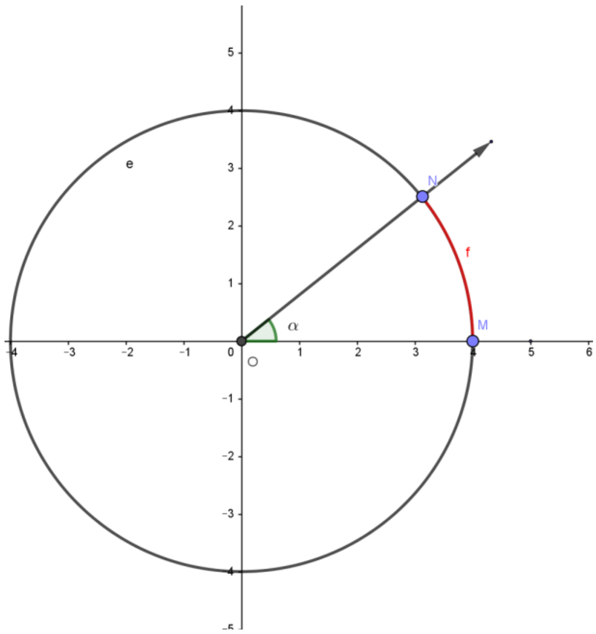
Así, el ángulo llano mide 180º y el ángulo de un giro mide 360º.

Sistema circular o radial

Ahora consideraremos un sistema de ejes coordenados cartesianos, por lo que quedan determinados cuatro ángulos rectos.

Dado que cada uno mide 90°, cualquier circunferencia *C*, con centro en el origen del sistema coordenado cartesiano, tiene un ángulo central de 360°.

El ángulo α determina sobre *C* un arco de circunferencia *MN* (tiene el mismo sentido que el ángulo α). Como para cada arco orientado existe un número real que es su longitud, podemos asignar a cada ángulo centrado la longitud del arco que determina, siempre con el signo que corresponda, siendo la longitud de ese arco la medida en radianes del ángulo.



Si tomamos la medida del radio y la transportamos sobre la circunferencia, el ángulo correspondiente a esa longitud de arco igual al radio, recibe el nombre de *radián*; éste es la unidad de medida de otro sistema de medición de ángulos llamado sistema circular o radial.

Por lo tanto, el radián, es el ángulo central que corresponde a un arco de circunferencia de igual radio que la misma.

Se demuestra que el radio está contenido 2π veces en la circunferencia y por lo tanto divide al ángulo central de la misma en 2π radianes.--

Se puede establecer la siguiente equivalencia entre este sistema y el sistema sexagesimal.

Sist. Radial	**Sist. Sexagesimal**
2π radianes	360°
π rad	180°
$\frac{\pi}{2}$rad	90°
$\frac{\pi}{3}$ rad	60°
$\frac{\pi}{4}$ rad	45°
$\frac{\pi}{6}$ rad	30°

Ejemplos

1. Expresar en radianes un ángulo de 51°20' .

51°20' = 51,33333... °

180° ____________ π rad

51,33333...° ____________ t rad. $\Rightarrow t = 51{,}3333°.\frac{\pi}{180°} = 0{,}895935$

51°20' = 0,895935 rad.

2. Expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2,5 radianes.

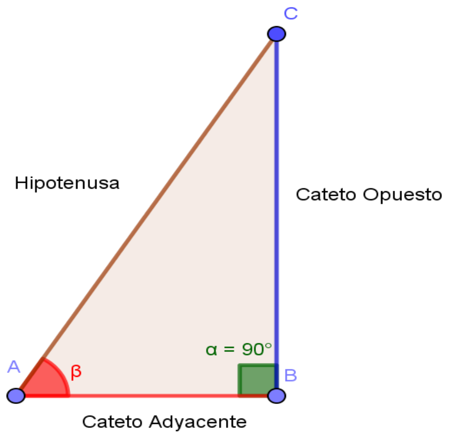
$$2{,}5\,\text{rad} = \frac{180^0}{\pi\,\text{rad}} \cdot 2{,}5\,\text{rad} \cong \frac{180^0 \cdot 2{,}5\,\text{rad}}{3{,}1416\,\text{rad}} = 143^0\ 14'\ 20''$$

ACTIVIDAD 5

Algunas Cuestiones sobre los ángulos y sus medidas:

a) Indicar, en sistema circular y en sistema sexagesimal, la medida de un ángulo de un cuarto, medio, tres cuartos y un giro. Graficar.
b) Expresar la medida de los siguientes ángulos en sistema circular o sexagesimal, según corresponda: π rad; 60°; 120°; 0,5 rad.
c) ¿Cuál es la medida de un giro antihorario de 2/3 de rad, en grados sexagesimales?
d) ¿Cuál es la medida de un giro horario de 450° en sistema circular?

Razones Trigonométricas



El teorema de Pitágoras relaciona los catetos de un triángulo rectángulo con su hipotenusa de la siguiente manera:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

Se definen relaciones que vinculan dos de los lados de un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos agudos.

$$\text{seno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad \Leftrightarrow \quad sen\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\text{coseno de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{longitud de la hipotenusa}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\hat{\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

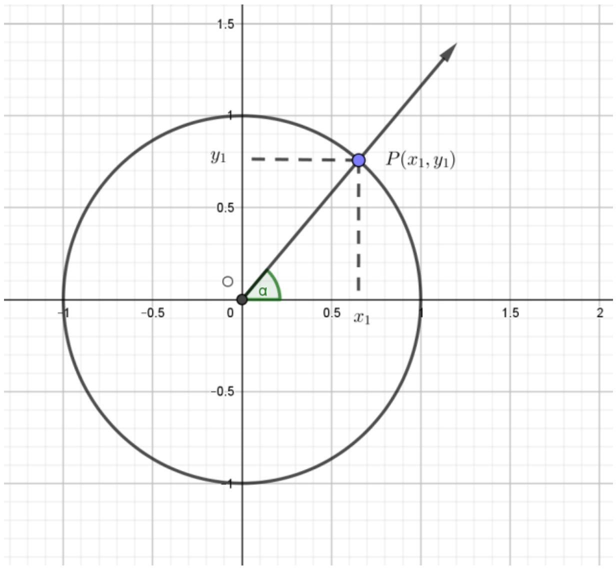
$$\text{tangente de } \hat{\alpha} = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{longitud del cateto adyacente a } \hat{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad tg\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Estas razones se denominan razones trigonométricas del ángulo agudoα, o también relaciones trigonométricas.

La razón trigonométrica es la comparación por cociente de dos magnitudes de la misma especie que da por resultado un número abstracto.

Una razón trigonométrica cambia de valor si cambia el ángulo sobre el cual se calcula, es decir que las razones trigonométricas dependen del valor del ángulo.

Para extender las definiciones a ángulos no agudos se consideran un par de ejes coordenados xy, se traza, con centro en el origen de coordenadas, una circunferencia de radio 1. Se considera un punto *P* perteneciente a la circunferencia de coordenadas (x_1,y_1) y un ángulo α como lo indica la figura, el segmento $\overline{OP} = r$ se denomina radio vector.



A partir de la figura definiremos las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera:

$$sen\hat{\alpha} = \frac{\text{ordenada de } P(x_1, y_1)}{\text{radio vector}} = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} \Rightarrow sen\,\hat{\alpha} = y_1$$

$$\cos\hat{\alpha} = \frac{\text{abscisa de } P(x_1, y_1)}{\text{radio vector}} = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{1} \Rightarrow \cos\hat{\alpha} = x_1$$

$$tg\hat{\alpha} = \frac{\text{ordenada de } P(x_1, y_1)}{\text{abscisa de } P(x_1, y_1)} = \frac{y_1}{x_1} \qquad \Rightarrow tg\hat{\alpha} = \frac{y_1}{x_1}$$

Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo

1)$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$ 2) $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

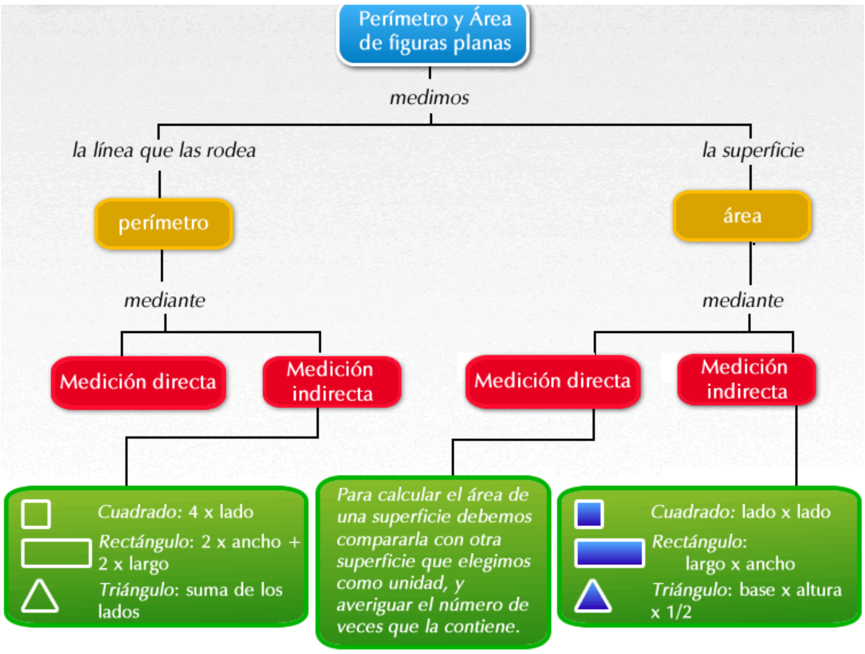
3)$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ 4) $sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$

5) $cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$

Estas relaciones nos permiten calcular las demás razones trigonométricas de un ángulo cuando se conoce una de ellas sin necesidad de saber cuánto vale el ángulo.

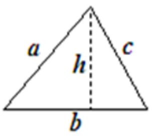
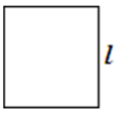
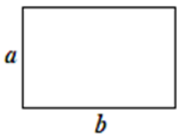
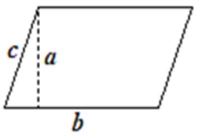
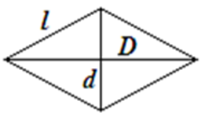
PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

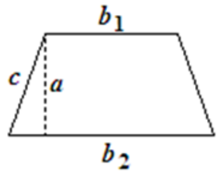
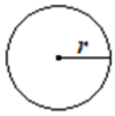
Recordemos su concepto por medio del siguiente mapa conceptual:



Disponible en: http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica2/resumen_unidad_3.html

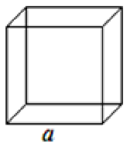
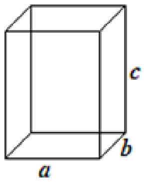
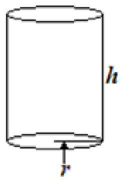
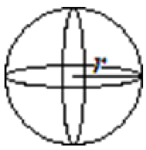
En el cuadro que sigue incluimos cómo se calculan el perímetro y el área de algunas figuras geométricas planas que es necesario que recuerdes.

Figura		Perímetro	Área
Triángulo:		$P = a + b + c$	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Cuadrado:		$P = 4 \cdot l$	$A = l^2$
Rectángulo:		$P = 2a + 2b$	$A = a \cdot b$
Paralelogramo:		$P = 2b + 2c$	$A = a \cdot b$
Rombo:		$P = 4l$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$

Trapecio Isósceles:		$P = b_1 + b_2 + 2c$	$A = \frac{a \cdot (b_1 + b_2)}{2}$
Circunferencia Circulo		Longitud de la circunferencia $l = 2 \cdot \pi \cdot r$	Área del Circulo $A = \pi \cdot r^2$

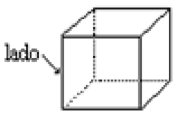
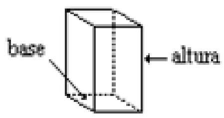
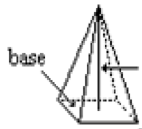
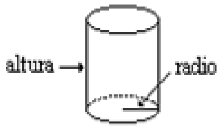
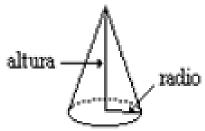
Algunas de estas figuras geométricas forman las caras de cuerpos geométricos a los cuales se puede calcular su superficie lateral (S_L) o su superficie total (S_T).
En la siguiente tabla se repasan algunos de dichos cuerpos y cómo se calculan sus superficies:

SUPERFICIE (LATERAL – TOTAL)

Cuerpo		Superficie Lateral	Superficie Total
Cubo		$S_L = 4a^2$	$S_T = 6a^2$
Prisma		$S_L = 2(a \cdot c + b \cdot c)$	$S_T = 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Cilindro		$S_L = 2\pi \cdot r \cdot h$	$S_L = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$
Esfera		----------	$S_T = 4\pi \cdot r^2$

Volumen: como propiedad **física** de la **materia**, es el espacio que ocupa un cuerpo. En los cuerpos sólidos de forma regular, el volumen está determinado por sus dimensiones y se obtiene aplicando la correspondiente fórmula matemática**.** Algunos cuerpos, como el cubo y el paralelepípedo, el volumen es el producto de sus tres dimensiones (largo, ancho y alto)**.** Para los demás se utiliza otro modo para calcularlo.

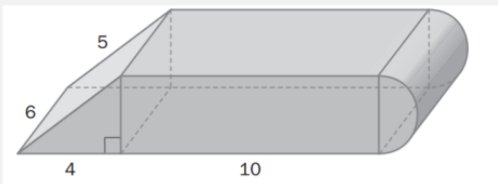
A continuación te damos un cuadro con los volúmenes de los cuerpos que podrás necesitar calcular y que se determina con expresiones matemáticas sencillas:

Cubo	Prisma	Piramide
 Volumen cubo $= l^3$ El volumen de un cubo se obtiene elevando al cubo la longitud de su arista	 Volumen prisma = sup. base x h El volumen de un prisma se obtiene multiplicando la superficie de su base por la altura del prisma.	 Volumen pirámide $= \frac{\text{sup. base x h}}{3}$ El volumen de una pirámide es equivalente a un tercio del volumen de un prisma de igual base y altura.
Cilindro	**Cono**	**Esfera**
 Volumen cilindro $= (\pi \times r^2) \times h$ El volumen de un cilindro se obtiene multiplicando la superficie de su base por la altura del cilindro.	 Volumen cono $= \frac{(\pi \times r^2) \times h}{3}$ El volumen de un cono es equivalente a un tercio del volumen de un cilindro de igual base y altura.	 Volumen esfera $= \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ El volumen de una esfera es igual a $\frac{4}{3}$ de π por el radio al cubo.

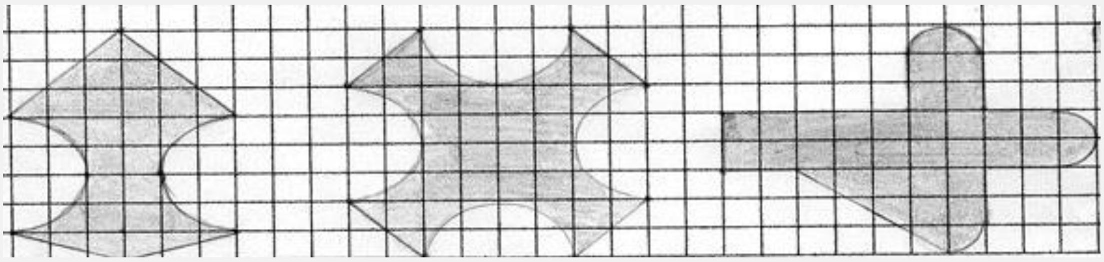
ACTIVIDAD 9

a) Calcular el perímetro (en cm y en m) y el área (en cm^2 y en m^2) de la siguiente figura:
Formada por una semicircunferencia cuyo radio mide 3 cm., por un rectángulo cuya base mide 8 cm y por un triángulo isósceles.

b) Calcular la medida de la superficie exterior de esta pieza. (Las longitudes están expresadas en cm)



c) Calcula la superficie griseada si el módulo cuadrado que conforma la malla representa 1 cm^2.



d) Calcular el perímetro y el área de las regiones sombreadas en cada figura:
ABCD es un cuadrado de lado 4m   RSTV es un rectángulo de base12m

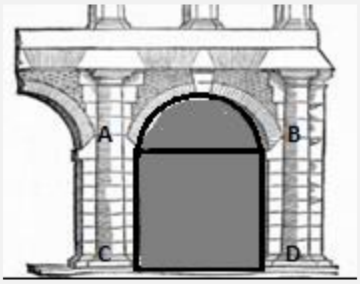
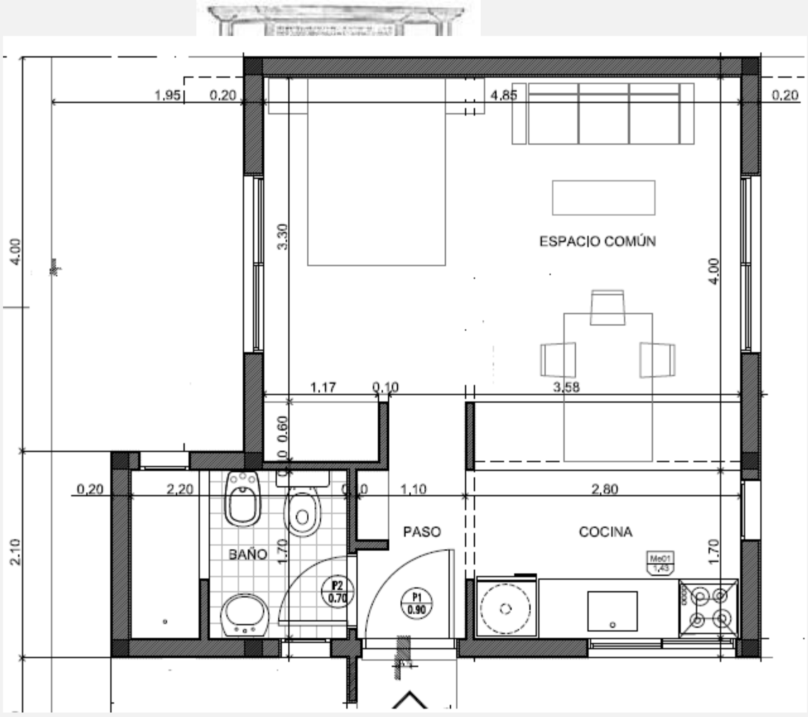


Fig. 1

Fig. 2

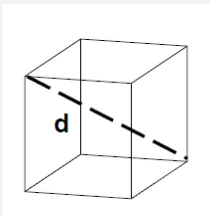


e) La siguiente figura pertenece al plano de una vivienda familiar. Los valores de la medición están expresados en metros. Observándola responde:

¿Cuántos metros cuadrados cubiertos tiene la misma?
¿Qué superficie ocupa el baño?
¿Cuánto mide el frente?
¿Cuál es el perímetro total de la vivienda?

f) El volumen de un cilindro es 6000π cm^3. Calcular el radio de la base y la altura si son entre sí como 4:3.

g) El cubo de la figura tiene 421,875 m^3 de volumen.
Calcula la longitud de la diagonal d



h) Una piscina tiene 8m de largo, 5m de ancho y 1,5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de $60 el m^2. ¿Cuánto costará pintarla? ¿Cuántos m^3 de agua se necesitan para llenarla?

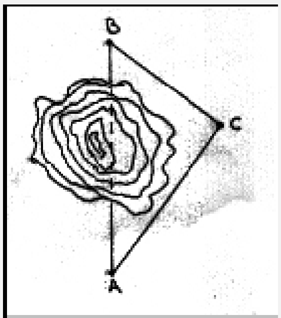
i) Al apoyar una escalera de 4 m. de largo sobre una de las paredes de un pasillo, la misma forma un ángulo de 30º con el piso. Apoyando la base de la escalera en el mismo lugar, se apoya ahora la misma en la otra pared, formando un ángulo de 45º con el piso. ¿Cuánto mide el ancho del pasillo? ¿A qué altura se apoya el extremo superior de la escalera en cada caso?

j) Los dos niveles de un local comercial se vinculan a través de una escalera de un tramo que tiene 22 escalones desde la planta baja hasta el primer piso. Cada peldaño mide 16 x 31 (medida de la contrahuella en cm x medida de la huella en cm). Con el objeto de mejorar la atención al cliente se construirá una rampa con cinta transportadora que una esos dos pisos, ubicándola al lado de la escalera y manteniendo el mismo desarrollo que ésta. Se desea saber: ¿Cuánto mediría aproximadamente el ángulo que formaría la cinta con la horizontal? ¿Qué distancia aproximada recorrería una persona ubicada sobre esa cinta? ¿El ángulo hallado es el apropiado para transportar en una cinta a una persona? Averigua cuál es la pendiente correcta que se debe utilizar en una cinta para transportar a una persona con discapacidad motriz. Nota: N° de huellas = N° de contrahuellas - 1

k) Un observador se encuentra a 204 m del edificio de la Torre de PEMEX en la ciudad de México, mide el ángulo que forma la horizontal con la visual dirigida a la punta de la construcción y es de 46°. ¿Qué altura tiene el edificio?

l) Se está proyectando una vía de ferrocarril que deberá ascender 300m a lo largo de una pendiente de 5°. ¿Qué longitud deberá tener la vía?

m) HERÓN (aproximadamente siglo I d.C.), el célebre matemático y constructor alejandrino, mostró cómo sería posible construir un túnel bajo una montaña, cavando simultáneamente desde ambos extremos para que al final se encontraran las dos perforaciones. Eligió por un lado el punto que juzgó conveniente para el proyecto, A por el otro lado el punto B, y por último el punto C, vértice del ángulo ACB, de 90°. A continuación midió AC y BC; las longitudes respectivas fueron de 100 y 75 m. Ahora, dijo Heron, será posible calcular los ángulos A y B. Es así que, dio instrucciones a los trabajadores que se encontraban en el punto A, para que siguieran la línea que formaba el ángulo calculado con AC. Luego, dio análogas instrucciones a la cuadrilla que esperaba en B para iniciar la perforación. ¿Cómo hizo para calcular los ángulos A y B?



DIBUJO4.JPG

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Se llama *sistema de ecuaciones lineales* a un conjunto de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas. En este curso se analizarán sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tienen la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

donde x, y son las incógnitas y $a_1,\ a_2,\ b_1, b_2,\ c_1, c_2$ son números reales.

Se llama *solución de una ecuación de 2 incógnitas* a todo *par ordenado* (k_1, k_2) de números reales que reemplazados ordenadamente en lugar de las incógnitas x e y convierten a la expresión (1) en una identidad. Se dice que k_1, k_2 satisfacen la ecuación.

Ejemplos

Consideremos las ecuaciones dadas en los ejemplos anteriores:

1) En la ecuación lineal con una incógnita $2x + 5 = 7$, $x = 1$ es solución de la ecuación pues 2. 1 + 5 = 7
2) (0, -3); (1, -5) son soluciones de la ecuación lineal con dos incógnitas $2x + y = -3$ pues
   $2.0 + (-3) = -3$ y $2.1 + (-5) = -3$
   En cambio el par (1, 2) no es solución pues $2.1 + 2 = 4 \neq -3$
   Sin embargo, estos dos pares no son las únicas soluciones para esta ecuación, serán solución todos los pares de la forma $(x, -3 - 2x)$. Veamos distintas maneras de expresar el mismo conjunto solución:
   S = $\{(x, -3-2x) \ / \ x \in R\}$
   S = $\{(x, y) \ / \ y = -3-2x \quad x, y \in R\}$
   S = $\left\{\left(\dfrac{-3-y}{2}, y\right) \ / \ y \in R\right\}$
   S = $\left\{(x, y) \ / \ x = \dfrac{-3-y}{2} \quad x, y \in R\right\}$
3) $\begin{cases} -2x + 3y = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

   Podemos despejar la misma incógnita de cada ecuación, y, por ejemplo, e igualarlas ya Que en ambas ecuaciones, el valor de y será el mismo:
   De la primera ecuación
   $$y = \frac{6 + 2x}{3}$$
   De la segunda ecuación
   $$y = \frac{8 - x}{2}$$
   $$\frac{8 - x}{2} = \frac{6 + 2x}{3} \Rightarrow 3(8 - x) = 2(6 + 2x) \Rightarrow 24 - 3x = 12 + 2x$$
   $$24 - 12 = 3x + 2x \Rightarrow 12 = 5x \Rightarrow \frac{12}{5} = x$$
   Este valor de x lo reemplazamos para hallar y:

$$y = \frac{6 + 2.\left(\frac{12}{5}\right)}{3} = \frac{54}{15}$$

Por lo tanto la solución es el par ordenado $\left(\frac{12}{5}, \frac{54}{15}\right)$.

Puede ocurrir que un sistema de ecuaciones lineales no tenga solución, en ese caso se dice que el sistema es ***incompatible*.**

Si tiene solución se dice ***compatible*,** pudiendo ser ***compatible determinado*** si la solución es única o ***compatible indeterminado*** si tiene más de una solución.

Ejemplos

Veamos los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Despejamos $y = 3 - 2x$ en la primera ecuación y reemplazamos en la segunda:

$x - 2(3 - 2x) = 4$, despejando $x = 2$. Si $x = 2$ entonces $y = -1$

Luego el sistema es *compatible determinado* y su <u>única</u> solución es (2,-1).

b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$

De la primer ecuación $y = 3 - 2x$ y de la segunda $y = 10 - 2x$.
Igualando: $3 - 2x = 10 - 2x$ entonces $-2x + 2x = 7$ no existe x pues $0x = 7$.
Luego el sistema <u>no tiene solución</u>, es decir, es *incompatible*.

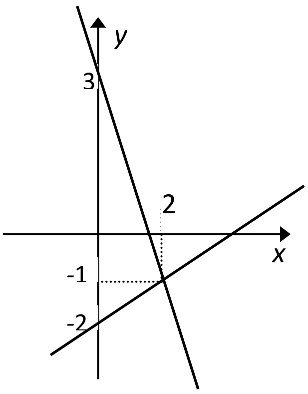
c) $\begin{cases} -x + y - 2 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

De la primer ecuación $y = x + 2$ y de la segunda $y = \frac{-2x - 4}{-2}$

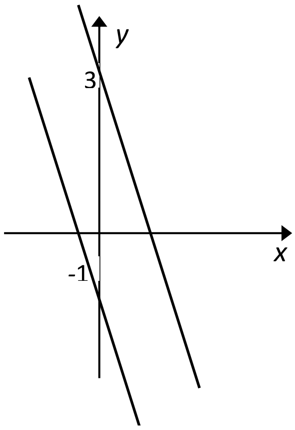
entonces $x + 2 = x + 2$, es decir $0x = 0$ para todo número real x.

Luego el sistema es *compatible indeterminado* y tiene <u>infinitas soluciones.</u> Se simboliza: $S = \{(x, x+2); x \in R\}$

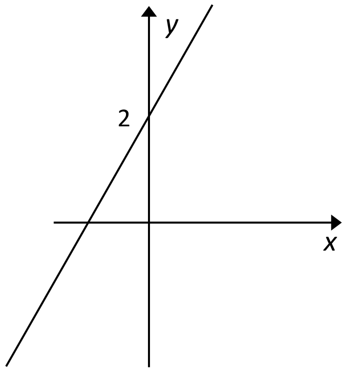
En el caso de los ejemplos anteriores (dos ecuaciones con dos incógnitas) podemos interpretarlos geométricamente de la siguiente manera:



Compatible determinado (CD)



Incompatible (I)



Compatible indeterminado (CI)

ACTIVIDAD 10

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} -3\,x - y = 1 \\ x \ + 2\,y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15\,x - 44 = -14\,y \\ 21\,y + 25\,x = 71 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \frac{1}{3}y = 2 \\ 3\,x = y - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\cos 60° + y\cos 210° = 0 \\ y\,\mathrm{sen}210° + x\,\mathrm{sen}60° = 18 \end{cases}$

Expresiones algebraicas. Operaciones

Las expresiones matemáticas en las cuales se combinan números, letras y operaciones se denominan expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es una forma de expresar una relación o una operación entre distintos valores numéricos pero de manera general. Las fórmulas, las ecuaciones y los polinomios se presentan a partir de expresiones algebraicas.

Por ejemplo,

$$2ab^2 - 3a + b^3$$

es una expresión algebraica. Los números 2; -3 y 1 son los coeficientes de los términos ab^2; a y b^3, que forman la parte literal de la expresión.

Llamamos *términos semejantes* a aquellos términos que tienen las mismas letras con las mismas potencias (es decir, la misma parte literal). Así, $4xy^3$ y $-2y^3x$ son términos semejantes, mientras que $-2ab^2$ y $3a^2b$ no lo son.
La suma de dos expresiones algebraicas se realiza sumando los coeficientes de los términos semejantes. Así, por ejemplo,

$$2a^2b + ab + 3ba - 6a^2b = -4a^2b + 4ab$$

La multiplicación de expresiones algebraicas se realiza aplicando la propiedad distributiva, propiedades de la potenciación y por último sumando los términos semejantes. Así, por ejemplo,

$$(x^2 + 2y)(y - 3x^2) = x^2y - 3x^4 + 2y^2 - 6x^2y = -5x^2y - 3x^4 + 2y^2$$

¿Qué temas previos tengo que conocer para trabajar con Expresiones Algebraicas Racionales?

Las expresiones algebraicas racionales (o fraccionarias) tienen un *dominio de definición*, es decir el mayor conjunto de números reales que serán los valores que puede tomar x, reemplazarlo en la expresión fraccionaria y obtener otro número real. Por ejemplo:

$$\frac{x+1}{x^2-4}$$

Es una expresión algebraica fraccionaria cuyo dominio es el conjunto $(-\infty, -2) \cup (-2,2) \cup (2, +\infty)$ pues son los valores que no anulan el denominador de la fracción.

Se utilizan los casos de factoreo de polinomios, se opera con polinomios (suma, resta, división y multiplicación). También se resuelven ecuaciones lineales (de grado 1) y ecuaciones cuadráticas (de grado 2).
Los casos de factoreo tienen que saberse bien antes de comenzar con este tema, los que más se suelen usar son: Factor Común, Diferencia de Cuadrados, Trinomio Cuadrado Perfecto y Factorización por Gauss (utilizando la regla de Ruffini). También conviene recordar el método para sumar o restar fracciones (de números enteros) sin usar la calculadora. Lo mismo con la multiplicación y división de fracciones, y simplificación de fracciones.

Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en expresarla como producto de nuevas expresiones más simples. Es decir, partimos de una expresión formada por sumas y/o restas de términos, por ejemplo
$(x^2 + 3x + 2)$, y llegamos a una expresión equivalente, pero que es una multiplicación ($(x + 2).(x + 1)$ en nuestro ejemplo). En esta unidad vamos a estudiar solo algunos casos de factorización, los más utilizados.

¿Por qué se llama "factorizar"?

Porque a los elementos que están multiplicando en una multiplicación se les llama "factores". Por ejemplo, en la multiplicación $2.3 = 6$, el 2 y el 3 son los "factores". En el ejemplo anterior,
$(x + 2)$ y $(x + 1)$ son los factores.

¿Para qué sirve factorizar un polinomio?

Por ejemplo, tener factorizada la fórmula de una función polinómica sirve para encontrar o visualizar los "ceros" o "raíces". Y eso es algo de gran utilidad en varios temas: para analizar la positividad y negatividad de la función, o para encontrar los máximos y/o mínimos. También la factorización de polinomios se puede utilizar para: resolver inecuaciones de grado 2 o mayor, hallar algunos límites, resolver ecuaciones polinómicas fraccionarias, identidades y ecuaciones trigonométricas, etc. Es decir que nos enseñan a factorizar porque en otros temas de Matemática necesitaremos factorizar polinomios para trabajar con multiplicaciones en vez de sumas y restas.

¿Cómo puedo saber si factoricé correctamente?

Multiplicando los factores que obtuvimos tenemos que poder llegar a la misma expresión de sumas y/o restas de la que partimos. No olvidemos que al factorizar estamos obteniendo una expresión equivalente a la original, pero con distinta forma (de multiplicación). Si luego multiplico todos los factores que quedaron en el resultado, tengo que volver "al principio". De esta forma estamos haciendo una "verificación".
Por ejemplo:

(Trinomio de segundo grado): $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

Verificación (multiplicación de los factores aplicando la Propiedad distributiva):

$$(x + 2).(x + 1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

En casi todos los casos se puede decir que "factorizar es lo contrario de multiplicar" o "factorizar es lo contrario de aplicar la distributiva" (Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma).

1. Factor común

Ejemplo 1: (factor común entre los números)

$$8a - 4b + 16c + 12d = 4.(2a - b + 4c + 3d)$$

El factor común es el número 4: es el máximo divisor común (MCD) entre los números 8, 4, 16 y 12.

Ejemplo 2: (factor común entre las letras)

$$7x^2 + 11x^3 - 4x^5 + 3x^4 - x^8 = x^2(7 + 11x - 4x^3 + 3x^2 - x^6)$$

El factor común es x^2: La x elevada a la menor potencia con que aparece.

Ejemplo 3: (factor común entre los números y entre las letras)

$$9x^3 - 6x^2 + 12x^5 - 18x^7 = 3x^2(3x - 2 + 4x^3 - 6x^5)$$

El factor común es $3x^2$: El MCD entre los números y la x elevada a la menor potencia.

2. Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplo 1: (Términos positivos)

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Busco dos términos que sean "cuadrado" de algún número o letra. En este ejemplo son: x^2 y 9. Las bases de estas dos potencias son la x y el 3. Luego verifico que $2.x.3 = 6x$ ("doble producto del primero por el segundo") es el término lineal del trinomio. El polinomio es un cuadrado “perfecto". El resultado de la factorización es la suma de las bases elevada al cuadrado: $(x + 3)^2$

Ejemplo 2: (Con un término negativo)

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

Tomo como bases a x y (-5), ya que $(-5)^2 = 25$, y con (-5), la verificación del término lineal $2.x.(-5) = -10x$. El resultado es la suma de las bases, al cuadrado. O sea $\left(x + (-5)\right)^2 = (x-5)^2$.

3. **Diferencia de cuadrados**

Ejemplo 1:

$$x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$$

Los dos términos son cuadrados. Las "bases" son x y 3. Se factoriza multiplicando la "suma de las bases" por la "resta de las bases".

Ejemplo 2:

$$x^2 - \frac{9}{25} = \left(x + \frac{3}{5}\right).\left(x - \frac{3}{5}\right)$$

$\frac{9}{25}$ es una potencia cuadrado, porque 9 es cuadrado (de 3), y 25 es cuadrado (de 5)

Ejemplo 3:

$$x^6 - 4 = (x^3 + 2)(x^3 - 2)$$

x^6 es también un cuadrado, es el cuadrado de x^3, ya que $(x^3)^6$es igual a x^6.

4. Factoreo con Gauss

Ejemplo 1: (Con coeficiente principal distinto de 1)

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x + 2).(x - 3).(2x - 1)$$

Divisores del término independiente (6): k = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6

Divisores del coeficiente principal (2): a = 1, -1, 2, -2

Posibles raíces del polinomio: $\frac{k}{a}$

Entonces pueden ser raíces: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

El polinomio podría ser divisible por alguno de estos binomios:

$(x - 1), (x + 1), (x - 2), (x + 2), (x + 3), (x - 3), (x + 6), (x - 6), (x + ½), \left(x - \frac{1}{2}\right),$

$(x + 3/2)$ ó $(x - 3/2)$. Es decir $(x - a)$, siendo "a" una de esas posibles raíces.

Pruebo hacer varias de esas divisiones, hasta que encuentro que al dividir por $(x + 2)$, el resto dá 0:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & -11 & 6 \\ -2 & & -4 & 14 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 - 7x + 3$ Resto: 0

Por ahora, la factorización queda: $(x + 2).(2x^2 - 7x + 3)$

En el polinomio de segundo grado que quedó puedo volver a buscar raíces con Gauss, o aplicar la ecuación para resolver ecuaciones de segundo grado (Baskara)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \begin{cases} \frac{7+5}{4} = 3 \\ \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Como ya tengo todos polinomios de grado 1, la factorización queda así:

$$2(x + 2)(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Según Gauss, es posible encontrar raíces de un polinomio entre los divisores del término independiente, y en los cocientes que forman esos divisores con el coeficiente principal $\left(\frac{k}{a}\right)$.

Para factorizar, hay que dividir al polinomio por (x - raíz) con la regla de Ruffini, división que tiene como resto 0. Cuando se obtiene como cociente un polinomio de segundo grado, utilizando la fórmula resolvente (Baskara), podemos hallar las dos últimas raíces.

Ejemplo 2: (Coeficiente principal igual a "1")

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x + 1).(x - 2).(x - 3).(x + 4)$$

k = 1, -1, 2, - 2, 3, - 3, 4, - 4, 6, - 6, 8, - 8, 12, -12, 24, - 24

a = 1, -1

Posibles raíces: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24, -24

Pruebo dividir con Ruffini por $(x + 1)$ y el resto dá 0:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -15 & 10 & 24 \\ -1 & & -1 & 1 & 14 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -14 & 24 & 0 \end{array}$$

Va quedando: $(x + 1).(x^3 - x^2 - 14x + 24)$

Ahora factorizo el cociente $x^3 - x^2 - 14x + 24$. Las posibles raíces son las mismas, porque es el mismo término independiente. Pruebo dividir por $(x - 2)$ y el resto dá cero:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & -14 & 24 \\ 2 & & 2 & 2 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

Ahora va quedando: $(x + 1).(x - 2).(x^2 + x - 12)$

Factorizo el último cociente con Baskara porque es un polinomio de segundo grado.

La factorización queda así:

$$(x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4)$$

Como el coeficiente principal es igual a 1, no hace falta calcular las distintas raíces con la fórmula $\frac{k}{a}$. Porque $\frac{k}{1} = k$. Entonces las posibles raíces son todas las posibles k, es decir, solamente los divisores del término independiente, sin tener en cuenta al coeficiente principal.

ACTIVIDAD 11

1) Simplificar

$$\frac{(3x^3 + 3)}{2x^2 + 4x + 2} =$$

2) Suma de expresiones algebraicas racionales

$$\frac{x+2}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} =$$

3) Sumas y restas combinadas

$$\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2x} + \frac{5}{4x^2} =$$

4) Multiplicación de expresiones algebraicas racionales

$$\frac{2x - x}{x^2 - 25} \cdot \frac{x+5}{x-1} =$$

5) División de expresiones algebraicas racionales

$$\frac{x^4 - 16}{x^3 + 27} \div \frac{x+2}{2x+6} =$$

6) Operaciones combinadas

$$\left(\frac{1}{4x-2} + \frac{x+1}{x^2-2x+1}\right) \div \frac{1}{2x} - \frac{3}{x-1} =$$

7) Ecuación racional

$$\frac{x-5}{x-1} = \frac{x-3}{x+1} + \frac{8}{x^2-1}$$

8) Factorizar las siguientes expresiones algebraicas. Simplificar en los casos posibles.

a) $24x^5 + 18x^4 - 30x =$

b) $x^2 - {}^{1}/_{9} =$

c) ${}^{3}/_{2}\, x^3 - {}^{3}/_{8}\, x =$

d) $m^2 + n^2 - 2\,m\,n =$

e) $5\,x^2 + 15\,x + {}^{45}/_{4} =$

f) $a^2 - b^2 =$

g) $-7\,h^7 - 7 =$

h) $\dfrac{x^3 - x^2}{x^3 + x^2 - 2\,x} =$

i) $\dfrac{6 - m^2}{1 + m^2 - 2\,m} =$

ANEXO I: Regla de tres

Se aplica a problemas en los que se conocen tres magnitudes, dos de ellas de la misma especie y se intenta obtener una cuarta magnitud cuya especie es de la misma que la de la tercera cantidad.

REGLA DE TRES SIMPLE: relaciona dos magnitudes.

1. Regla de tres simple directa: se consideran magnitudes directamente proporcionales.

Ejemplo:

Por 5 bolsas de cemento de 50 Kg. se pagaron $ 135. ¿Cuánto se pagará por 18 bolsas iguales?

5 bolsas---------------$ 135
18 bol.---------------- x
De esta expresión se obtiene la proporción:
5 / 18 = 135 / x ⇒ x = (18 bolsas. $ 135) / 5 bolsas ⇒ x = $486
Rta: $ 486.- (18 bolsas)

2. Regla de tres simple inversa: se consideran magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Si para construir una obra en 36 días se necesitan 15 operarios, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar la misma obra en 27 días?

36 días----------------15 operarios
27 días---------------- x
Como la relación entre las cantidades es inversa, se invierte una de las dos columnas de valores y a partir de ella se forma la proporción que se resuelve.
36 días---------------- x
27 días----------------15 operarios
Luego:
36/27 = x/15⇒ x = (36 días.15 operarios) / 27 días ⇒ x = **20 operarios**
Rta: se necesitarán 20 operarios

REGLA DE TRES COMPUESTA: relaciona más de dos magnitudes y puede descomponerse en dos o más problemas de regla de tres simple.

3. Regla de tres compuesta directa:

Ejemplo:

Para contratar 12 operarios durante 8 días se necesitan $ 4800. Si los operarios fuesen 18 y hubiese que contratarlos durante 30 días: ¿Cuánto dinero se necesitaría?
12 operarios----------------8 días----------------$ 4800

18 operarios----------------30 días--------------- x
12 operarios----------------$ 4800
18 operarios---------------- x
Luego:
12/18 = 4800/x ⇒ x = (18. 4800) / 12⇒x = **$ 7200**
8 días----------------$ 7200
30 días---------------- x
Luego:
8/30 = 7200/x ⇒ x = (30 . 7200) / 8 ⇒x = **$ 27000**

Rta: si los operarios fueran 18 durante 30 días se necesitarían $27000.

4. Regla de tres compuesta inversa:

Ejemplo:

Para realizar una construcción en 36 días trabajando 10 horas diarias se emplean 20 albañiles. Si se desea realizar la misma construcción en 15 días, trabajando 8 horas diarias: ¿Cuántos albañiles se necesitarían?

36 días----------------10 horas----------------20 albañiles
15 días----------------8 horas --------------- x
36 días----------------20 albañiles
15 días---------------- x
Luego: x = (36 . 20) / 15 ⇒x = **48 albañiles**
10 horas----------------48 albañiles
8 horas ---------------- x
Luego: x = (10 . 48) / 8 ⇒x = **60 albañiles**

Rta: se necesitarían 60 albañiles.

REGLA DE TRES COMPUESTA MIXTA: en el problema intervienen magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales.

Ejemplo:

Para recoger la cosecha de un campo de 60 ha., 10 hombres emplearon 12 días. Si hubiera que recoger la cosecha de un campo de 45 ha.:¿qué tiempo emplearían 15 hombres?

60 ha----------------10 hombres----------------12 días
45 ha----------------15 hombres --------------- x
60 ha----------------12 días
45 ha ---------------- x
Luego: x = (45 . 12) / 60 ⇒x = **9 días**
10 hombres ----------------9 días
15 hombres -------------- x

Luego: x = (10 . 9) / 15 ⇒x = **6 días**

Rta: 15 hombres emplearían 6 días.

ANEXO II: ESCALA

La representación de objetos a su tamaño natural no es posible cuando éstos son muy grandes o cuando son muy pequeños. En el primer caso, porque requerirían formatos de dimensiones poco manejables y en el segundo, porque faltaría claridad en la definición de los mismos. Esta problemática la resuelve la ESCALA, aplicando la ampliación o reducción necesarias en cada caso para que los objetos queden claramente representados en el plano del dibujo
Entonces, escala es la proporción de medidas de un objeto real y el tamaño representado en un mapa, plano o dibujo, sin distorsionar las relaciones que guardan entre sí los elementos que componen la realidad que se representa. Se dice que el dibujo, mapa o plano está “hecho a escala” cuando se conservan, en el papel, las relaciones multiplicativas presentes en el objeto.

Se define escala como la razón entre la medida representada y medida observada o real

$$\boldsymbol{Esc.} = \frac{\boldsymbol{medida\ representada}}{\boldsymbol{medida\ real}}$$

ESCALA NUMÉRICA.
La escala numérica se presenta siempre basándose en centímetros, expresada así, por ejemplo: 1: 10000. Esto quiere decir que un centímetro del mapa equivale a 10000 centímetros en la realidad.
Si denominamos:

- **d a la medida del objeto en el plano, mapa o dibujo;**
- **D a la medida del objeto en la realidad;**
- **1/N a la escala utilizada;**

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{\mathrm{N}}$$

$$\therefore \mathrm{D} = \mathrm{N}.\mathrm{d} \quad y \quad \mathrm{d} = \frac{D}{\mathrm{N}}$$

Como es poco práctico cuando trabajemos los mapas y sus escalas manejar simplemente centímetros, por lo que tendremos que convertir esos centímetros en otras unidades de medidas algo más grandes.

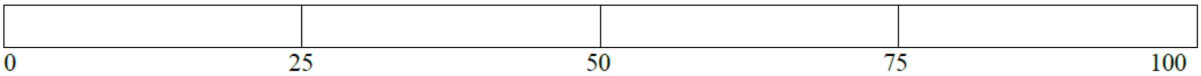
Ejemplo: Si la escala numérica es de 1:10000, como
10000 cm = 1000 dm = 100 m = 10 dam = 1 hm = 0,1 km
quiere decir que en esa escala numérica, 1 cm equivaldría a 10000 cm ó 1000 dm ó 100 m ó 10 dam ó 1 hm ó 0,1 km.

Las escalas, dependiendo de la relación en el antecedente y el consecuente, pueden ser:

- De ampliación, si el antecedente es más grande que el consecuente. Ejemplos: 100:1, 20:1, 5:1, 2:1.
- Natural, si el antecedente y el consecuente coinciden plenamente, es decir, 1:1.

- De reducción, si el antecedente es más pequeño que el consecuente. Ejemplos: 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100.

LA ESCALA GRÁFICA.
También podemos encontrarnos otro tipo de escala conocida como escala gráfica. La escala gráfica está representada en la leyenda del mapa, y viene expresada como una línea dividida en segmentos (habitualmente cada segmento es de un centímetro) que representan una cantidad concreta de metros o kilómetros.
Ejemplo:

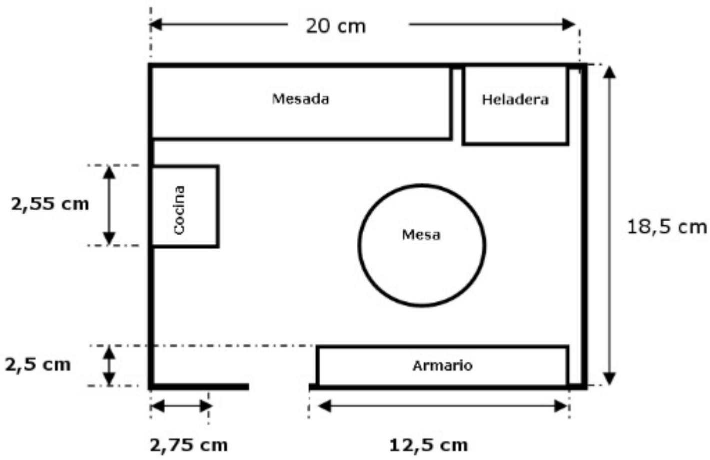


En esta escala cada segmento tiene 4 cm y equivalen a 25 metros en la realidad.
La manera de trabajar con la escala gráfica es sencilla. Empleamos nuestra regla numérica, y ponemos el 0 de ésta en el punto de origen que queramos, y medimos hasta el punto de destino. La distancia en centímetros de nuestra regla la tendremos que convertir en la distancia que hay en la realidad.

<u>EJERCITACION</u>

1. Si un mapa es a escala numérica 1:2500, estima a qué distancia en metros y kilómetros están dos puntos que estén separados entre sí a 2 cm, 6 cm, 3,5 cm, 4 cm y 5 centímetros.
2. Un muro de 20 metros de longitud ha sido graficado con un segmento de 4cm ¿Cuál fue la escala utilizada?:
3. ¿Cuánto mide el ancho de un mueble, en metros, si su representación en el papel ocupa 7 cm y la escala de representación es 1:30?
4. La distancia entre el punto A y el punto B usando la escala gráfica es de 3 cm, y la escala gráfica señala que 1 cm es igual a 25 metros en la realidad. ¿Cuánto distan en la realidad?
5. En el mapa vial doble de España, estimar las distancias reales en línea recta desde la capital a las ciudades resaltadas con punto.

6. Para representar en un formato A3 (297×420 mm) la planta de un edificio de 60 x 30metros, ¿qué escala se podría usar y cual considera la más conveniente?
7. En la representación en un formato A4 (210×297 mm) de una pieza de reloj de dimensiones 2 mm x 1 mm, ¿qué escala se podría usar?
8. A un constructor le encargaron hacer la colocación de los artefactos y muebles de la cocina, pero le aclararon que el plano que le dieron tiene una escala de 1:20 y las medidas indicadas son las del dibujo (foto esquemática).
   A partir del plano dibujado, contesten las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuántos metros mide la cocina?
   b) El largo de la mesa es de 2,15 m, ¿qué dimensión tendría en el plano?
   c) Los dueños le pidieron que ubique la heladera al lado de la mesada que mide 2,50 m de largo por 65 cm de ancho. ¿Se podrá colocar la heladera que en escala mide 3,5 cm por 3,25 cm de profundidad?
   d) ¿Cuáles son las medidas reales de la cocina y del armario?



Universidad Nacional de Río Negro
Sede Alto Valle y Valle Medio

CICLO DE INICIO UNIVERSITARIO 2020