Universidad Nacional de Río Negro
Sede Alto Valle y Valle Medio

CICLO DE INICIO UNIVERSITARIO 2020

MATEMÁTICA

Ingeniería en Alimentos
Ingeniería en Biotecnología

—

Escuela de Producción, Tecnología y Medio Ambiente

PUBLISHED BY PUBLISHER

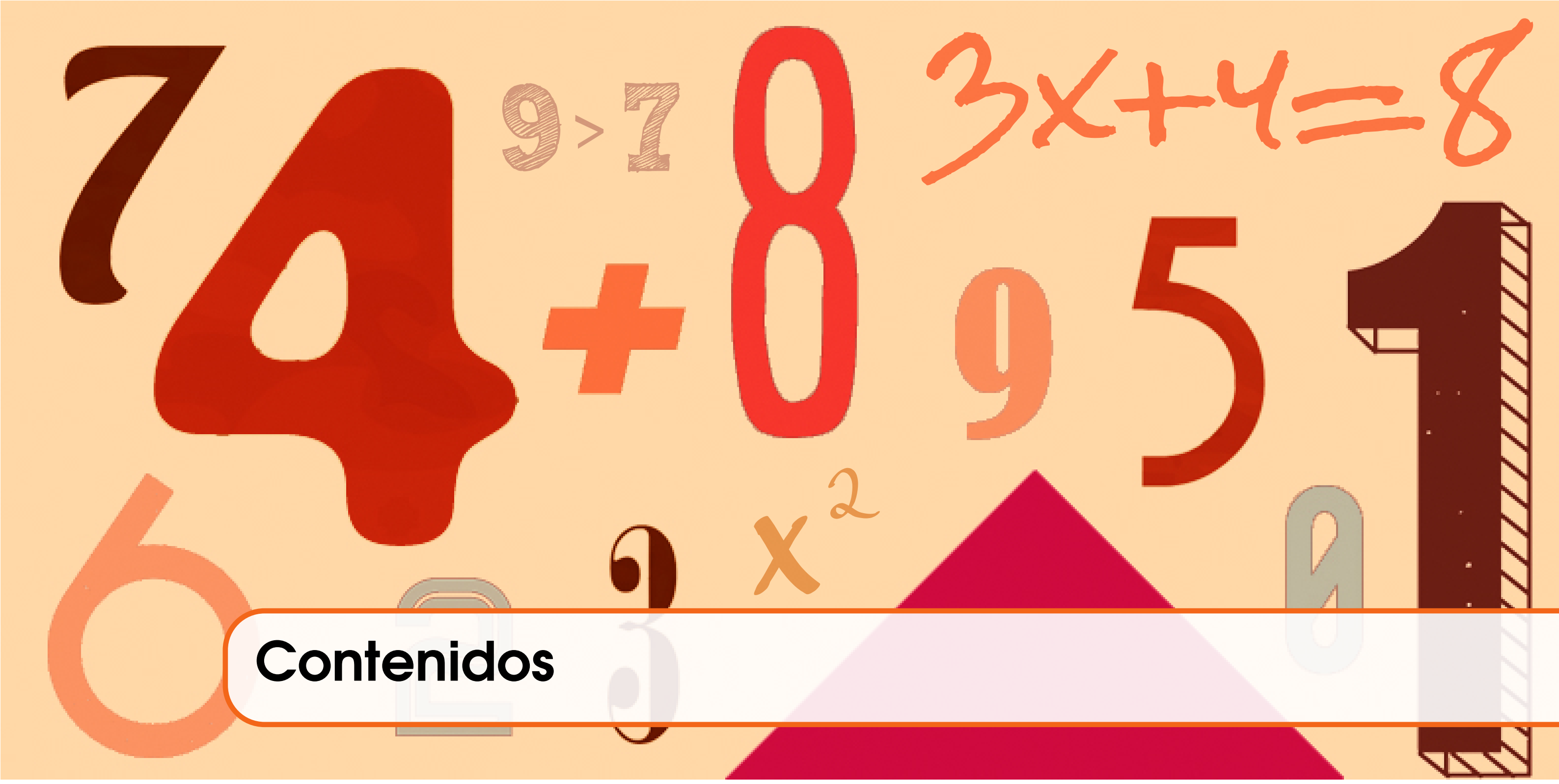
BOOK-WEBSITE.COM

Primera impresión, Diciembre 2019

Prólogo

Mediante el estudio de la Matemática se busca desarrollar una forma de pensamiento que nos permita modelar y resolver situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales. En este caso en particular, para la aplicación en diversos puntos de vista de la ingeniería.
En la aplicación de la matemática se deben utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo, se busca adquirir una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina, de colaboración y crítica, fundamental para el ámbito en el que nos desarrollamos.
El presente curso pretende acompañar durante el inicio de este camino a los y las estudiantes ingresantes de la Escuela de Tecnología, Producción y Medio Ambiente de la Universidad Nacional de Río Negro brindándoles las herramientas matemáticas básicas y fomentando el desarrollo de habilidades en el manejo de las mismas. De esta manera, contarán con los conceptos y la ejercitación necesaria para comenzar a transitar el primer año de su carrera.

Dra. Virginia Cardoso Schwindt - Ing. Marcela Filippi - Dra. Griselda Itovich



Contenidos

1. Los números

1.1 Números Naturales

El conjunto de los **números naturales** ($\mathbb{N}$) está constituido por los números 1, 2, 3, 4,..., 100,...,n,..., que son aquellos que nos permiten contar, ordenar, y realizar operaciones como la suma, resta, multiplicación y división. El resultado de la suma o de la multiplicación de números $\mathbb{N}$ da como resultado un número perteneciente a este conjunto. Sin embargo, para la resta y la división no siempre el resultado pertenece al conjunto de números $\mathbb{N}$.

1.1.1 Características del conjunto de $\mathbb{N}$

- Es un conjunto infinito.
- Tiene primer elemento, pero no tiene último elemento
- Todo número que pertenece a este conjunto tiene un sucesor, es decir, cada número natural tiene un número consecutivo.
- Todo número natural, salvo el 1, tiene antecesor.
- Entre dos números naturales consecutivos no existe otro número natural. Se dice que el conjunto es discreto.

Por ser un conjunto ordenado, es posible representar a los números naturales en una recta, eligiendo como origen el 0. Cuando se incluye en el conjunto de números $\mathbb{N}$, se utiliza el símbolo $\mathbb{N}_0$ para indicarlo.

1.1.2 Múltiplos y divisores

Se sabe que la multiplicación es una suma de términos iguales y puede escribirse de manera comprimida o abreviada:

$$\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{n \text{ veces}} = na$$

■ **Ejemplo 1.1** $3+3+3+3+3+3+3+3 = 8\cdot 3 = 24$

En este caso decimos que 24 es múltiplo de 3, y que 24 es múltiplo de 8, o, lo que es lo mismo: 3 es divisor de 24 y 8 es divisor de 24. ■

Definición 1.1.1 El número a es múltiplo de b si es posible encontrar un número natural k tal que

$$a = k \cdot b$$

Si a es múltiplo de b, la división $\frac{a}{b}$ tiene resto cero. Por lo tanto, se puede decir que:

- a es múltiplo de b;
- b divide a a;
- b es factor de a;
- a es divisible por b.

Propiedades 1.1 De la Definición 1.1.1,
- 1 es divisor de todos los números ya que: $a = 1 \cdot a$.
- 0 es múltiplo de todos los números ya que: $0 = 0 \cdot a$

■ **Ejemplo 1.2** En el Ejemplo 1.1 podemos decir que
- 24 es múltiplo de 3;
- 3 divide a 24;
- 3 es factor de 24;
- 24 es divisible por 3.

■

Ejercicios

Ejercicio 1.1 ¿252 y 588 son múltiplos de 7? ¿Es la suma de ellos múltiplo de 7? ¿Es su diferencia múltiplo de 7? ■

Ejercicio 1.2 Analice las siguientes situaciones:

a) Dado un número natural cualquiera, ¿Cuál es su divisor más pequeño? ¿Cuál es su máximo divisor?
b) Si un número es divisor de otro, ¿también lo es de los múltiplos de este? ¿Por qué?
c) Dado un número natural cualquiera, ¿Cuál es su múltiplo menor? ¿Cuál es su múltiplo mayor?
d) La suma de varios múltiplos de un número, ¿también es múltiplo de dicho número? Si es verdadero, demuéstrelo, mientras que si es falso, de un contraejemplo.

■

Ejercicio 1.3 Enuncie los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 11. ■

Ejercicio 1.4 Determine la Verdad o Falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si un número es divisible por 6, entonces, es divisible por 3.
b) Si un número es divisible por 3, entonces, es divisible por 6.
c) Si un número es divisible por 3 y por 5, entonces, es divisible por 15.
d) Si un número es divisible por 7, entonces, no es divisible por 2.
e) Si un número no es divisible por 4, entonces, no es divisible por 2.
f) Si un número es divisible por 16, entonces, es divisible por 8 y por 4.

■

Ejercicio 1.5 El número de cajas que hay en una cámara frigorífica es menor que 1000. Si las agrupamos de a 5, de a 6, de a 9 o de a 11, siempre sobra 1. ¿Cuántas cajas hay en la cámara? ■

1.1.3 Números primos y compuestos

La cantidad de divisores que tiene un número indica si es un **número primo** o un **número compuesto**. Todo número n mayor que 1 tiene como divisores al 1 y a sí mismo. Si no tiene otros divisores, se dice que el número es primo. En cambio, si tiene más de dos divisores, el número es compuesto.
Los números compuestos se pueden factorizar, escribiéndolos como producto de los números primos que lo dividen. La descomposición es única, teniendo en cuenta que el orden de los factores no alterará el producto.

■ **Ejemplo 1.3** Observe que

- 2 es un número primo, pues tiene únicamente dos divisores, 1 y 2. 2 es el único número primo par.
- 50 es un número compuesto, ya que admite los divisores 1, 2, 5, 10, 25 y 50. Se puede factorizar como producto de números primos: $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
- El número 1 no es un número primo ni un número compuesto.

■

Ejercicios

Ejercicio 1.6 La suma de dos números primos, ¿es siempre un número primo? Justifique ■

Ejercicio 1.7 El producto de dos números primos, ¿es siempre un número primo? Justifique ■

1.1.4 Máximo común divisor

Si se buscan los divisores de los números 24 y 36:

- Los divisores de 24 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
- Los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Note que hay divisores comunes a ambos números: 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Al mayor de los divisores comunes se lo denomina **máximo común divisor** (*mcd*). En este caso, es el 12, lo cual se denota

$$mcd(24,36) = 12$$

Al escribir los números 24 y 36 de forma factorizada, es mucho más sencillo calcular el *mcd* sin necesidad de listar los divisores de cada uno de los números.

■ **Ejemplo 1.4** Factorizando 24 y 36 se obtiene

- $24 = 2^3 \cdot 3$
- $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Para hallar $mcd(24,36)$, se realiza el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones, con el menor exponente con que figuren. Luego,

$$mcd(24,36) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

que es el mismo resultado hallado al buscar los divisores de los números 24 y 36. ■

Nota 1.1. *Si $mcd(a,b) = 1$, es decir, 1 es el único divisor común entre a y b, se dice que a y b son coprimos, o primos entre sí.*

1.1.5 Mínimo común múltiplo

Si se buscan los primeros múltiplos de los números 9 y 12:

- Los primeros múltiplos de 9 son 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117...

- Los primeros múltiplos de 12 son 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, ...

Observe que hay un número infinito de múltiplos de cada uno de ellos y hay infinitos múltiplos comunes a ambos: 36, 72, 108,....
Al menor de los múltiplos comunes se lo denomina **mínimo común múltiplo** (*mcm*). En este caso, es el 36, lo cual se denota

$$mcm(9,12) = 36$$

Al escribir los números 9 y 12 de forma factorizada, es mucho más sencillo calcular el *mcm* sin necesidad de listar los múltiplos de cada uno de los números.

Ejemplo 1.5 Factorizando 9 y 12 se obtiene

- $9 = 3^2$
- $12 = 2^2 \cdot 3$

Para hallar $mcm(9,12)$, se realiza el producto de los factores que son comunes a ambas descomposiciones, como también de los que no lo son, tomándolos con el mayor exponente con que figuran. Luego,

$$mcm(9,12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

que es el mismo resultado hallado al buscar los primeros múltiplos de los números 9 y 12. ■

Ejercicios

Ejercicio 1.8 En la Autopista Serranías Puntanas, de 240 km de largo, han planificado colocar

- cabinas telefónicas cada 12 km;
- puestos sanitarios cada 30 km;
- estaciones de servicio cada 15 km.

a) Si en el kilómetro 0 existen los tres servicios, ¿en qué kilómetro vuelven a coincidir los tres?
b) Si la Autopista se extiende 60 km más, al final de este nuevo tramo, ¿volverán a coincidir?
c) ¿Qué característica tienen los números de los kilómetros en que coinciden los tres servicios? ■

Ejercicio 1.9 Un árbol de Navidad tiene dos guirnaldas de luces. Una de ellas se prende cada 6 segundos, mientras que la otra cada 9 segundos. ¿Cada cuántos segundos se prenderán juntas? ■

1.2 Números enteros

En el conjunto de $\mathbb{N}$, es posible restar cuando el minuendo es mayor que el sustraendo. Para poder restar en el caso contrario, es necesario ampliar el campo númerico introduciendo el cero y los opuestos de los $\mathbb{N}$, llamados números enteros negativos.
El conjunto de los **números enteros** se representa con $\mathbb{Z}$. Por ejemplo, $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. Se puede representar en la recta numérica como en la Figura 1.1.

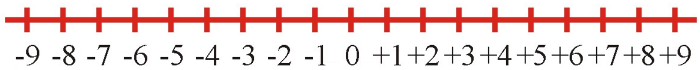


Figura 1.1: Representación de números enteros en la recta numérica

Definición 1.2.1 Si x es un número entero, $-x$ es el opuesto de x.

■ **Ejemplo 1.6** De la Definición 1.2.1,
a) Sea $x = -7$, su opuesto es $-x = -(-7) = 7$.
b) Sea $x = 4$, su opuesto es $-x = -4$.
■

Las operaciones de suma, resta y producto siempre dan como resultado un número entero. No ocurre lo mismo con la división, ya que por ejemplo 8 dividido 3 no resulta en un número entero.

1.2.1 Características del conjunto de $\mathbb{Z}$

- Es un conjunto infinito.
- No tiene primer ni último elemento
- Todo número que pertenece a este conjunto tiene un antecesor y un sucesor.
- El conjunto es discreto.

1.2.2 Valor absoluto

Definición 1.2.2 Sea x es un número entero, se define al valor absoluto de x, notado como $|x|$, de la forma:
- Si el número x es positivo o cero, el valor absoluto es el mismo número.
- Si el número x es negativo, el valor absoluto es su opuesto, $-x$.

Es decir, $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$

Nota 1.2. *El valor absoluto de cada número entero, es siempre un número no negativo.*

■ **Ejemplo 1.7** De la Definición 1.2.2,
a) $|3| = 3$
b) $|-3| = -(-3) = 3$
■

Geométricamente, el valor absoluto mide la distancia del número x al cero. Para el Ejemplo 1.7, podemos ver en la Figura 1.2 la representación.

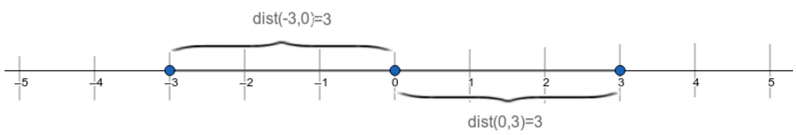


Figura 1.2: Representación en la recta numérica del Ejemplo 1.7

Ejercicios

Ejercicio 1.10 Encontrar el valor de cada una de las expresiones siguientes, teniendo en cuenta que $x = 2$, $y = -3$
a) $|x+y|$
b) $|x|+|y|$
c) $|2\cdot(x+y)|$
d) $|x+3\cdot y|$
e) $|x-y|$
f) $|x|-|y|$
g) $|2\cdot(x-y)|$

h) $y - |x - 3 \cdot y|$

■

1.2.3 Comparación de números enteros

Dados dos números enteros, a y b, se dice que $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$. De manera análoga, se dice que $a > b$ si y sólo si $b - a < 0$

Nota 1.3. *Observaciones a tener en cuenta:*

- *Todo número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.*
- *Dados dos números enteros negativos a y b, resulta que $a < b$ si y sólo sí $|b| < |a|$.*

Ejercicios

Ejercicio 1.11 Reescribir cada enunciado de manera simbólica.

a) x es positivo.
b) y es negativo.
c) t es menor que 6.
d) u es menor o igual que 1.
e) z es mayor que -5.
f) x es menor que 5.
g) x es mayor o igual que -3.
h) t está comprendido entre -3 y 0.
i) z es menor que -3.
j) t es menor que 5 y mayor que -2.
k) y es menor o igual que 2 y mayor que 0.

■

1.3 Números racionales

Con los números naturales es posible "contar" pero no siempre "medir". Para expresar mediciones, muchas veces es necesario utilizar números que representen "partes de la unidad". Algunos ejemplos de números fraccionarios son la mitad, la tercera parte, las dos quintas partes de una unidad.
El conjunto de números enteros unido al conjunto de todas las fracciones constituye el conjunto de los **números racionales**, denotado por $\mathbb{Q}$.

Definición 1.3.1 Un número racional es un cociente de números enteros, donde el divisor no es 0. Así, cualquier número racional se puede expresar como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, y $b \neq 0$.

Si en una fracción el numerador y el denominador son coprimos, se dice que la fracción es **irreducible**.

1.3.1 Características del conjunto de $\mathbb{Q}$

- Es un conjunto denso, es decir, que entre dos números racionales hay infinitos números racionales.
- No se puede hablar de sucesores o antecesores en este conjunto.

■ **Ejemplo 1.8** Dados dos números racionales a y b, siempre es posible encontrar otro entre ellos. Una manera sencilla de determinarlo es la semisuma $\frac{a+b}{2}$. Como ejercicio, debe verificar que $a < \frac{a+b}{2} < b$. ■

Para este conjunto, la suma, la resta y el producto son cerradas, es decir, el resultado de estas operaciones realizadas con dos números del conjunto $\mathbb{Q}$, siempre dan como resultado un número del mismo conjunto.

1.3.2 Interpretación de los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$

El número racional $\frac{a}{b}$ indica que se divide en b partes iguales a la unidad, y se toman a de esas partes.

■ **Ejemplo 1.9** El número $\frac{7}{8}$ indica que la unidad se ha dividido en 8 partes y se toman 7 de ellas. Gráficamente se puede observar en la Figura 1.3 si se representa a la unidad como una barra. La parte sombreada representa a la fracción.

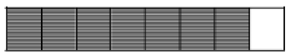


Figura 1.3: Representación gráfica de la fracción $\frac{7}{8}$

Para representarlo en la recta numérica, se divide a la unidad en 8 partes iguales y la séptima de estas partes será el número $\frac{7}{8}$ en la recta, como se observa en la Figura 1.4.

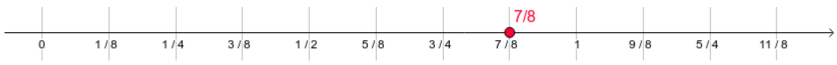


Figura 1.4: Representación en la recta numérica de la fracción $\frac{7}{8}$

■

1.3.3 Operaciones con fracciones

Suma

La suma de varias fracciones con igual denominador, es la fracción que tiene el mismo denominador, y el numerador es la suma de los numeradores.

■ **Ejemplo 1.10** a) $\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+1+5}{9}=\frac{8}{9}$

b) $\frac{3}{11}-\frac{2}{11}+\frac{5}{11}+\frac{4}{11}-\frac{6}{11}=\frac{3-2+5+4-6}{11}=\frac{4}{11}$ ■

En el caso de que las fracciones tengan distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador, y se suman como se indicó previamente.

■ **Ejemplo 1.11** $2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{150}{75}+\frac{30}{75}-\frac{35}{75}=\frac{150+30-35}{75}=\frac{145}{75}=\frac{29}{15}$ ■

Generalizando,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$

Sin embargo, es conveniente utilizar como denominador de las fracciones equivalentes, al mínimo común múltiplo. En el Ejemplo 1.11, el mínimo común múltiplo entre 1, 5 y 15 es 15. Luego,

$2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{30}{15}+\frac{6}{15}-\frac{7}{15}=\frac{29}{15}$

■ **Ejemplo 1.12** Se quiere resolver $\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}$. Se descomponen los denominadores en factores primos:

$$mcm(6,10,8) = mcm(2\cdot 3, 2\cdot 5, 2^3) = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8} = \frac{20}{120}+\frac{36}{120}+\frac{75}{120} = \frac{20+36+75}{120} = \frac{131}{120}.$$

■

Multiplicación

El producto de varias fracciones es otra fracción, que tiene como numerador el producto de los numeradores, y como denominador el producto de los denominadores.

■ **Ejemplo 1.13** $\frac{6}{11}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2} = \frac{6\cdot(-3)\cdot 7}{11\cdot 4\cdot 2} = -\frac{126}{88}$ ■

Generalizando,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

División

Definición 1.3.2 Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **recíprocas** o **inversas** si su producto es igual a 1. Es decir,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = 1$$

De la Definición 1.3.2,

- Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inversa sí y solo sí $a \neq 0$.
- La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$.

Para dividir una fracción por otra, se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

■ **Ejemplo 1.14** a) $\frac{5}{6}:\frac{7}{11} = \frac{5}{6}\cdot\frac{11}{7} = \frac{55}{42}$

b) $\frac{3}{7}:5 = \frac{3}{7}:\frac{5}{1} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{35}$

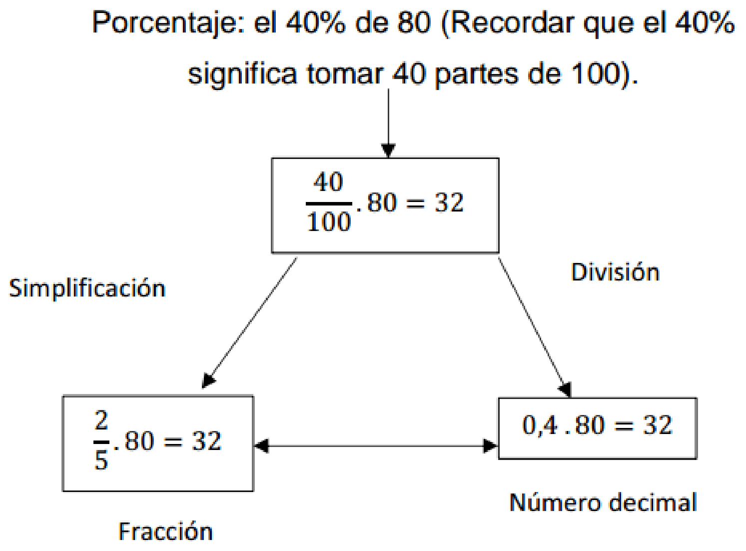
■

Generalizando,

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

1.3.4 Fracciones y Porcentajes

Hablar de *porcentaje* o *por ciento* es habitual en la vida cotidiana. Es una forma de representar una parte de un todo.



■ **Ejemplo 1.15** ¿Cuánto es el 15 por ciento (15%) de 38?
Una forma: $\frac{15}{100} \cdot 38 = 0.15 \cdot 38 = 5.7$
O también: $\frac{15}{100} \cdot 38 = \frac{3}{20} \cdot 38 = 0.15 \cdot 38 = 5.7$
5.7 representa el 15% de 38. ■

■ **Ejemplo 1.16** ¿Qué parte del total representa el 25% de una cantidad C?
25% de $C = \frac{25}{100} \cdot C = \frac{1}{4} C$
Representa la cuarta parte de una cantidad C. ■

Se utilizarán ejemplos para analizar los aumentos y disminuciones porcentuales (Variación porcentual)

■ **Ejemplo 1.17** Un frasco de yogurth cuesta inicialmente \$18. Su precio sube 15%. ¿Cuál será el nuevo precio?
Nuevo precio $= 18 + \frac{15}{100} \cdot 18 = 18 + 0.15 \cdot 18 = (1 + 0.15) \cdot 18 = 1.15 \cdot 18 = 20.70$
Luego el nuevo precio será \$20.70 ■

■ **Ejemplo 1.18** Si se realiza el pago al contado de un tanque de acero inoxidable de 20 litros, uno de los proveedores realiza un descuento del 10%. ¿Cuál es el precio final al contado por un tanque cuyo precio inicial es de \$13900.
Precio al contado $= 13900 - \frac{10}{100} \cdot 13900 = 13900 - 0.1 \cdot 13900 = (1 - 0.15) \cdot 13900 = 0.9 \cdot 13900 = 12510$
Luego el precio al contado será \$12510 ■

Generalizando, el precio que se paga será igual a: precio actual $\pm$ porcentaje $\cdot$ precio actual.

Ejercicios

Ejercicio 1.12 El precio de un termómetro era de \$120 y sufrió un incremento del 14 %. ¿Cuál es su nuevo precio? ■

Ejercicio 1.13 Se pagó U$S 85,40 por un electrodo. En el precio se incluye el 21% de IVA. ¿Cuál es el precio sin IVA? (IVA: Impuesto al Valor Agregado). ■

Ejercicio 1.14 Un filtro de bolsa costaba \$160 y se pagó por él \$128 en una liquidación. ¿De cuánto fue la rebaja? Expresar el resultado en porcentaje. ■

Ejercicio 1.15 Escribir las siguientes expresiones utilizando porcentaje.

a) Dos de cada cinco estudiantes aprobaron matemática.
b) La cuarta parte de los estudiantes son de ingeniería.
c) Todos los estudiantes asisten a la clase de ILEA.
d) Tres octavos de los estudiantes están en el laboratorio.
e) Uno de cada cuatro estudiantes aprobó el ingreso de química.
f) Las tres cuartas partes del curso está inscripto en la carrera Ingeniería en Alimentos.

■

Ejercicio 1.16 Un tanque de 50500 litros de capacidad contiene 5840 litros de agua. Expresar esta cantidad como un porcentaje de la capacidad total. ■

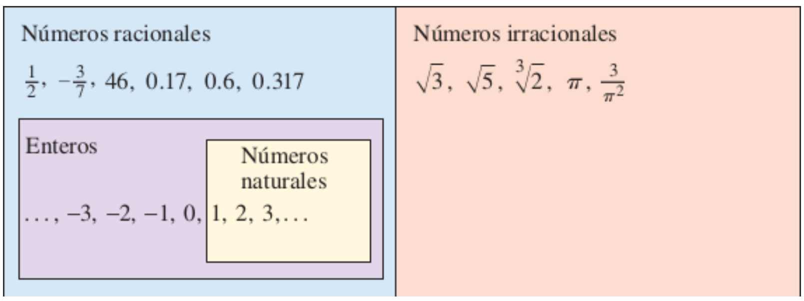
Ejercicio 1.17 Una cantidad cambió de 157 a 168. Hallar el cambio porcentual. ■

Ejercicio 1.18 Una cantidad cambió de 0.558 a 0.475. Hallar el cambio porcentual. ■

Ejercicio 1.19 Cuando se hace una oferta 3x2 en un producto, ¿qué descuento se está haciendo en el precio unitario? Cuando se hace una oferta 4x3 en un producto, ¿qué descuento se está haciendo en el precio unitario? ■

1.4 Números reales

Los números racionales junto con los números irracionales, constituyen el conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$).



Existe una correspondencia entre los números realos y los puntos de la recta: a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.

1.4.1 Propiedades de los $\mathbb{R}$

La suma satisface las siguientes propiedades. Sean a, b, y $c \in \mathbb{R}$:

- Conmutativa: $a+b=b+a$
- Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- Existencia de elemento neutro: $a+0=0+a=a$, $0 \in \mathbb{R}$

- Existencia de simétrico/opuesto: $a+(-a)=(-a)+a=0$

El producto satisface las siguientes propiedades. Sean a,b, y $c \in \mathbb{R}$:

- Conmutativa: $ab=ba$
- Asociativa: $(ab)c=a(bc)$
- Distributiva: $a(b+c)=ab+ac$
- Existencia de elemento neutro: $a\cdot 1=1\cdot a=a$
- Existencia de inverso/simétrico:$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1, a\neq 0$

La diferencia (o resta) se obtiene a partir de la definición de suma:

$$a-b=a+(-b) \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

El cociente se obtiene a partir de la definición de producto, siempre que $b\neq 0$:

$$a/b=a\cdot b^{-1} \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

Nota 1.4. *Observación: El* 0 *no tiene simétrico.*

Ejercicios

Ejercicio 1.20 Dados los siguientes números reales, clasificarlos en $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{I}$ según corresponda.

a) 5
b) -7
c) 3,2
d) $\frac{28}{7}$
e) $\frac{32}{14}$
f) $-\frac{20}{5}$
g) $2,1\overset{\frown}{3}$
h) $-4,3\overset{\frown}{5}$
i) $\sqrt{2}$
j) 3.212112111211112...
k) $\sqrt{9}$
l) $\sqrt{8}$
m) $23,454545...$
n) $14,566666...$
o) π

■

Ejercicio 1.21 Representar en la recta real los siguientes números:

a) $-\frac{2}{3}$
b) 5
c) 0
d) $\frac{1}{7}$
e) $\sqrt{2}$
f) $-\frac{1}{7}$
g) $-3,7$

■

Ejercicio 1.22 Dados los siguientes pares de números, reemplazar por $<$, $>$ o $=$, según corresponda:

a) $\frac{1}{2}\square 0$
b) $5\square\sqrt{6}$
c) $-3\square-\frac{5}{2}$
d) $\pi\square 3,14159$
e) $\sqrt{2}\square\sqrt{3}$
f) $\sqrt{2}\square 1,41$
g) $\frac{1}{2}\square 0,52$
h) $\frac{1}{3}\square 0,333$
i) $0,3333...\square\frac{1}{3}$
j) $0,67\square\frac{2}{3}$
k) $0,25\square\frac{1}{4}$
l) $-1\square-2$

1.4.2 Operaciones aritméticas en el conjunto $\mathbb{Z}$

Además de las cuatros operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), se deben tener en cuenta otras que resultan también necesarias para la profundización de conceptos.

Potencia

Definición 1.4.1 Sea $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, se define la potencia n-ésima de a como

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ veces }a}$$

Se llama **base** de la potencia al número a y n se llama **exponente**.

Ejemplo 1.19 a) $3^2=9$ significa que el número 3 se ha multiplicado por sí mismo dos veces, es decir $3\cdot 3$ y el resultado es 9.
b) $2^3=8$ significa que el número 2 se ha multiplicado por sí mismo tres veces, es decir $2\cdot 2\cdot 2$ y el resultado es 8.

Reglas de la Potencia

- Las potencias de exponente par son siempre positivas.
- Las potencias de exponente impar tienen el mismo signo que la base.

Propiedades de la Potencia

- Un número no nulo elevado a cero, siempre tiene como resultado 1: $a^0=1$.
- Un número elevado a 1, siempre es el mismo número: $a^1=a$.
- Si dos potencias se están multiplicando, y tienen la misma base, el resultado es la base elevada a la suma de los dos exponentes: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
- Si dos potencias se están dividiendo, y tienen la misma base, el resultado es la base elevada a la resta de los dos exponentes: $a^m/a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
- Una potencia elevada a un número, es igual a otra potencia de la misma base, donde el exponente es igual al producto del exponente de la potencia por el número al que se eleva: $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

- Si se multiplican dos potencias de distinta base y mismo exponente, las bases se multiplican y la nueva base queda elevada al mismo exponente.: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- Si se dividen dos potencias de distinta base y mismo exponente, las bases se dividen y la nueva base queda elevada al mismo exponente.: $a^n/b^n = (a/b)^n$

■ **Ejemplo 1.20** a) $(-2)^5 \cdot (-2)^2 = (-2)^{5+2} = (-2)^7 = -128$
b) $(-2)^5/(-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$.
c) $[(-2)^3]^2 = (-2)^{3 \cdot 2} = (-2)^6 = 64$
d) $(-2)^3 \cdot (3)^3 = (-2 \cdot 3)^3 = (-6)^3 = -216$
e) $(-6)^3/(3)^3 = (-6/3)^3 = (-2)^3 = -8$ ■

Raíz cuadrada de un número entero

La raíz es la operación contraria o inversa de la potenciación.

Potencia	Raíz
$x^n = a$	$\sqrt[n]{a} = x$
x: Base de la potencia	x: Valor de la raíz.
n: Exponente de la potencia	n: Índice de la raíz
a: Valor de la potencia	a: Radicando.

Cuando se multiplica a la raíz $\sqrt[n]{a}$ por sí misma n cantidad de veces, se obtiene el radicando a.

■ **Ejemplo 1.21** Como $8^2 = 64$ $\quad \sqrt[2]{64} = 8$. ■

Cuando el índice de la raíz es 2, por convención no se indica ya que se sobreentiende. En este caso particular, se denomina raíz cuadrada: $\sqrt[2]{64} = \sqrt{64} = 8$.

Nota 1.5. *Para encontrar el valor de la raíz cuadrada de* 64*, se debe hacer la siguiente pregunta: ¿Qué número elevado a* 2 *(al cuadrado) da como resultado* 64*?.*
La respuesta es 8*, porque* $8^2 = 64$.

■ **Ejemplo 1.22** Se quiere obtener $\sqrt{100}$. Dado que $\sqrt{100} = \sqrt[2]{100}$, se hace la siguiente pregunta: ¿Qué número elevado al cuadrado (a 2) da como resultado 100?
La respuesta es 10, ya que $10^2 = 100$. Luego $\sqrt{100} = 10$ ■

Importante: La raíz cuadrada (o de cualquier índice par 4, 6, 8, ...) de un número negativo, no tiene solución en el conjunto de $\mathbb{R}$. Ejemplo: $\sqrt[2]{-100}$. ¿Qué número elevado a 2 da como resultado -100? La respuesta es que no existe un número que elevado al cuadrado resulte en un número negativo.

Raíz cúbica

La raíz cúbica de un número es aquella que multiplicada tres veces por sí misma, da como resultado el radicando.

■ **Ejemplo 1.23** a) Se quiere obtener $\sqrt[3]{27}$. Notar que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Luego, $\sqrt[3]{27} = 3$.
b) Se sabe que $\sqrt[3]{x} = 5$. Se quiere obtener el número x al que al aplicarle la raíz cúbica, da como resultado 5. Notar que $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Luego, $\sqrt[3]{125} = 5$. ■

En ocasiones puede ser complejo encontrar las raíces, por lo que se utiliza la calculadora científica para realizar estos cálculos cuando es necesario.

Orden de las operaciones

Suponga que tiene la operación $3+5\cdot 2$. ¿Es igual a 13 o a 16?

El orden en el que deben realizarse las operaciones aritméticas básicas es el siguiente:

1. Paréntesis
2. Potencia/Raíz
3. Multiplicación - División
4. Suma - Resta

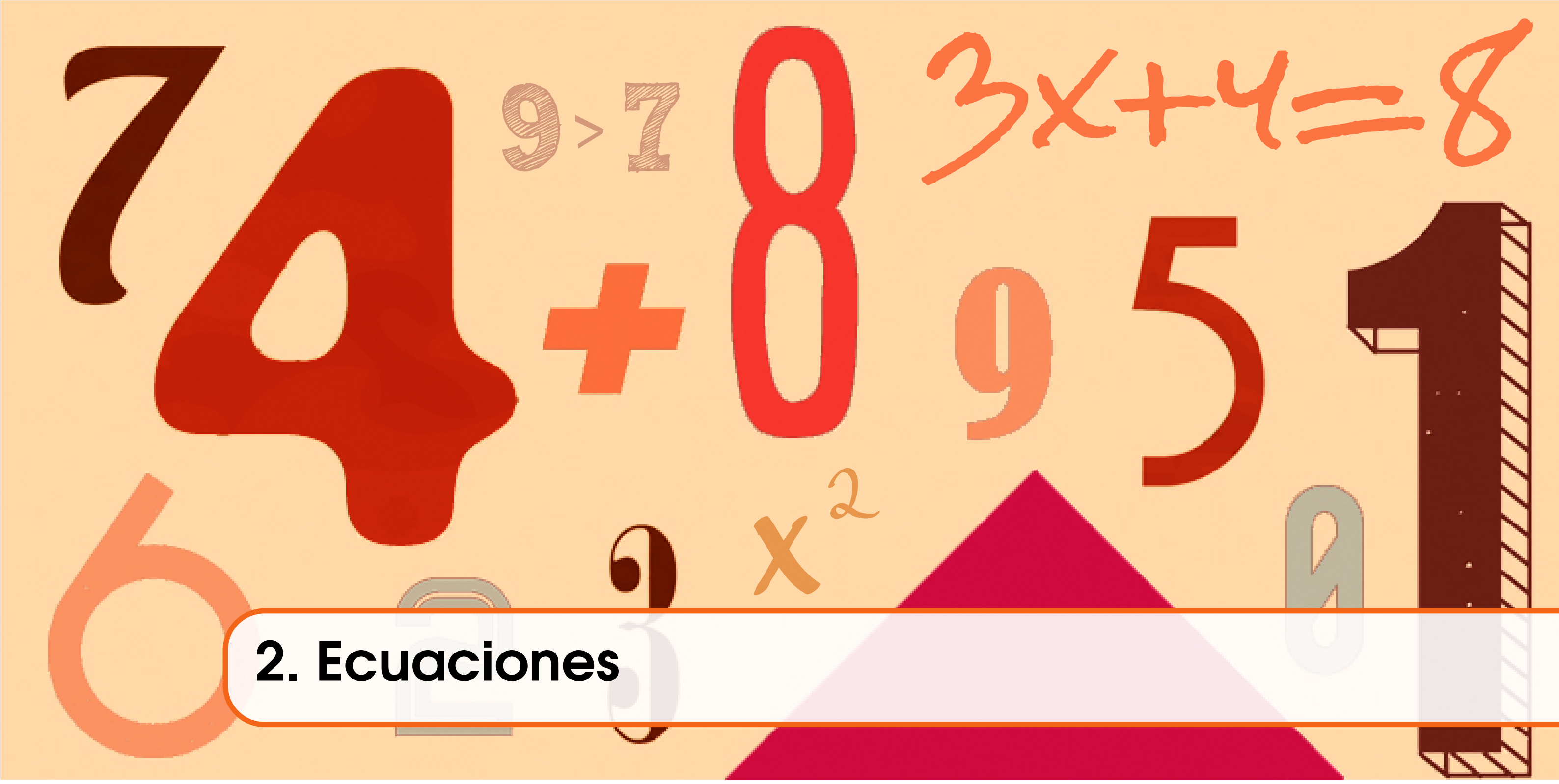
Es decir, primero se deben resolver las operaciones dentro de los paréntesis, luego las operaciones de potencia y/o raíz. Una vez resueltas, se procede a la multiplicación y/o división, y finalmente se resuelven las sumas y/o restas. Por lo tanto, $3+5\cdot 2=13$

■ **Ejemplo 1.24**

a) $-[3+4+(4+7)+4-9] = -[3+4+(11)+4-9] = -(7+11-5) = -(18-5) = -(13) = -13$

b) $[15-(2^3-10/2)]\cdot[5+(3\cdot 2-4)]-3+(8-2\cdot 3) = [15-(8-10/2)]\cdot[5+(3\cdot 2-4)]-3+(8-2\cdot 3) = [15-(8-5)]\cdot[5+(6-4)]-3+(8-6) = [15-(3)]\cdot[5+(2)]-3+(2) = (12)\cdot(7)-3+2 = 84-3+2 = 83$

■



2. Ecuaciones

Se denominan expresiones algebraicas a las expresiones matemáticas en las que se combinan números, letras y operaciones. Estas expresiones permiten expresar de manera general una relación u operación entre distintos valores numéricos.
Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparece un valor desconocido llamado incógnita. Resolver una ecuación significa encontrar, si existe, el valor de esta incógnita, es decir, un valor real que hace verdadera la igualdad.
En la práctica, es necesario plantear ecuaciones para poder obtener determinada información, muchas veces traduciendo una descripción verbal al lenguaje matemático. Es por esto que muchas veces es necesario verificar si la solución matemática tiene sentido en el contexto del problema a resolver.

¿Qué es el álgebra? Es el manejo de relaciones numéricas en los que una o más cantidades son desconocidas (incógnitas), a las que se representa con letras, con lo cual el lenguaje simbólico da lugar al **lenguaje algebraico**. Las operaciones para números como la suma, resta, producto, potencia, etc. son conocidas como **operaciones algebraicas** y cualquier combinación de números y letras se conoce como una **expresión algebraica**. Por lo tanto, al traducir un cierto problema al lenguaje algebraico, se obtienen expresiones algebraicas, que son una secuencia de operaciones entre números y letras. Las letras se las denomina, en general, **variables o incógnitas** y se las simboliza con las últimas letras del alfabeto (x,y,z), en cambio las primeras letras se emplean para simbolizar números arbitrarios pero fijos (a,b,c), que llamamos **constantes**.
Frecuentemente aparecen igualdades que son de distinto tipo: identidades, ecuaciones y fórmulas.
Las **operaciones básicas con expresiones algebraicas**, se utilizan en el importante proceso de resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y otras importantes aplicaciones de ellas.

■ **Ejemplo 2.1** Escribir en lenguaje algebraico las siguientes oraciones:

a) La base es el doble que la altura.
Si se llama b = base y h = altura, la expresión algebraica será $b = 2h$. También se podría haber denominado a la base como x y a la altura como y. Luego $x = 2y$.

b) Dos números pares consecutivos.
$2n$ representa un número par. El siguiente número par es $2n+2$, donde n es cualquier número

entero. ■

2.1 Ecuaciones y resolución de problemas

Como se mencionó previamente, una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen números y letras ligadas mediante operaciones algebraicas. Las letras, cuyos valores son desconocidos, se llaman **incógnitas**.
Resolver una ecuación consiste en transformar la igualdad en otra equivalente más sencilla, hasta obtener la solución, que es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad inicial.
Una expresión como $x+(x+1)+(x+2)=33$ es una ecuación, que sólo es cierta para $x=10$. Luego la solución de la ecuación es $x=10$.
Hay ecuaciones que tienen no tienen soluciones (como $x+3=x$), así como otras que tienen varias soluciones e incluso infinitas soluciones (como $\operatorname{sen} x=0$).
En conclusión, resolver una ecuación es obtener las soluciones, si existen, que la satisfacen.

■ **Ejemplo 2.2** Resolver la siguiente ecuación y verificar el resultado: $-2x-3=5$.

$$\begin{aligned}
-2x-3&=5\\
-2x-3+3&=5+3\\
-2x&=8\\
(-2x)/(-2)&=8/(-2)\\
x&=-4
\end{aligned}$$

Notar que si se reemplaza a x por su solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
-2x-3&=5\\
-2(-4)-3&=5\\
8-3&=5\\
5&=5
\end{aligned}$$

luego verifica la ecuación. ■

■ **Ejemplo 2.3** Resolver la siguiente ecuación y verificar el resultado: $5(x+3)=2x+3$.

$$\begin{aligned}
5(x+3)&=2x+3\\
5x+15&=2x+3\\
5x+15-2x&=2x+3-2x\\
3x+15&=3\\
3x+15-15&=3-15\\
3x&=-12\\
3x/(3)&=-12/(3)\\
x&=-4
\end{aligned}$$

Notar que si se reemplaza a x por su solución en la ecuación original:

$$\begin{aligned} 5(x+3) &= 2x+3 \\ 5((-4)+3) &= 2(-4)+3 \\ 5(-1) &= -8+3 \\ -5 &= -5 \end{aligned}$$

luego verifica la ecuación. ■

Nota 2.1. *Para asegurar la validez del valor encontrado, es conveniente verificar en la ecuación original. A la solución también se le llama* ***raíz de la ecuación****.*

2.2 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se llama ecuación de primer grado con una incógnita a una expresión de la forma

$$ax+b=0 \text{ con } a \neq 0,\ a,b \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Se dice de primer grado porque la incógnita sólo aparece elevada la potencia 1.

■ **Ejemplo 2.4** a) Considerar la ecuación $x-2=5x-3$. Aunque inicialmente no es de la forma de la ec. 2.1, se puede operar algebraicamente hasta obtener la expresión $4x-1=0$. Luego $x=\frac{1}{4}$ es la solución de la ecuación. Se deja como ejercicio la verificación de la solución.

b) Sea $x=x-3$. Operando se obtiene que $0x=-3$, con lo cual, no existe ningún número que satisfaga la igualdad. Por lo tanto la ecuación no tiene solución.

c) Las expresiones $x=x$ o $3x-2=2(x-1)+x$ tienen infinitas soluciones y son ciertas para cualquier número real: son identidades.

■

Ejercicios

Ejercicio 2.1 Resolver las siguientes ecuaciones y verificar las soluciones halladas:

a) $4x-1=2-4x$
b) $22x-7x-\frac{15}{2}=10-\left(\frac{7}{2}x-1\right)$
c) $\frac{2x+1}{5}-\frac{x-1}{6}=\frac{x-3}{2}$
d) $\frac{x+1}{2}=\frac{15x+11}{6}$
e) $6x-24=5(x-4)+x-4$
f) $25x-18=20-5(x+3)+30x$
g) $[2(x-3)-2]\cdot 2-4(x-3)=2x-2$
h) $2(x-3)+4(x+5)=6$
i) $\frac{2}{x}=\frac{1}{4}$
j) $(x-3)x=x^2$

■

Ejercicio 2.2 Indicar cuál de las siguientes ecuaciones es de primer grado y luego encontrar su solución:

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{15x+11}{6}$
b) $\frac{2}{x+1}=2x+5$
c) $5+x=\frac{2}{x+3}$
d) $(x^2-1)(x+1)=0$

■

Ejercicio 2.3 a) La suma de tres números enteros consecutivos es 48. ¿Cuánto vale cada número?
b) Encuentre tres números impares consecutivos cuya suma es igual a 117.
■

Ejercicio 2.4 De un tanque lleno de jugo concentrado se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcular la capacidad del tanque en centímetros cúbicos. ■

2.3 Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a una expresión de la forma

$$ax^2+bx+c=0 \text{ con } a\neq 0,\ a,b,c\in\mathbb{R} \tag{2.2}$$

También se la llama ecuación cuadrática.
El grado de una ecuación es el mayor exponente al que aparece elevada la incógnita.

■ **Ejemplo 2.5** a) La expresión $2x+3=5(x-3)$ es una ecuación de grado 1, con una incógnita y se llama de primer grado.
b) La expresión $4-x=3x^2+5$ es una ecuación con una incógnita, de grado 2, o de segundo grado.
c) La expresión $(x+2)(x+3)=0$ es una ecuación de segundo grado porque operando se obtiene $x^2+5x+6=0$
d) La expresión $t(t+1)^2=3(t-7)$ es una ecuación de grado 3, ya que operando se obtiene $t^3+2t^2-2t+21=0$.
■

Una ecuación de segundo grado tiene a lo sumo dos raíces.

■ **Ejemplo 2.6** a) Resolver $4x^2=400$. Operando se llega a que $x^2=10^2$, luego, recordando que $\sqrt{x^2}=|x|$, se obtiente que $x_1=10$ y $x_2=-10$, que son las dos soluciones de la ecuación cuadrática.
b) Resolver $21x^2=400$. Operando se llega a que $x_1=\sqrt{\frac{400}{21}}=\frac{21\sqrt{21}}{21}$ y $x_2=-\sqrt{\frac{400}{21}}=-\frac{21\sqrt{21}}{21}$
■

■ **Ejemplo 2.7** Resolver $t(t-10)=0$. Notar que el primer miembro es un producto de dos factores: t y $t-10$. Si el producto de dos factores es cero, uno de los factores es cero. Luego, $t(t-10)=0$ implica $t=0$ o $t-10=0$, por lo que las raíces buscadas son $t_1=0$ y $t_2=10$. ■

Para hallar las soluciones a ecuaciones de segundo grado más complejas, se utiliza la fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.3}$$

siendo a el coeficiente que acompaña al término cuadrático, b el coeficiente que acompaña al término lineal y c el término independiente.

■ **Ejemplo 2.8** Resolver $x^2+10x+8=0$. En este caso no es sencillo despejar la incógnita para encontrar las raíces, por lo que utilizaremos la ec. 2.3.
En este caso, $a=1, b=10, c=8$. Reemplazando en la fórmula de Bhaskara se obtiene que

$x_1 = -0.88$ y $x_2 = 9.12$. ■

Deducción de la Fórmula de Bhaskara

Sea una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.
Si se suma a ambos miembros de la ecuación $-c$ se obtiene

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicando a ambos miembros por $4a$,

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumando a ambos miembros b^2,

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Notar que el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto, luego se puede reescribir,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros

$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Y por definición de valor absoluto,

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Luego

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Por lo que despejando x se obtiene la fórmula de la ec. 2.3.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ **Ejemplo 2.9** Encontrar las dos raíces de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$. Utilizando la ec. 2.3, y notando que $a = 1, b = 1$ y $c = -6$,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Luego, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$ ■

■ **Ejemplo 2.10** Encontrar las dos raíces de la ecuación $9x^2 + 6x + 1 = 0$. Utilizando la ec. 2.3, y notando que $a = 9, b = 6$ y $c = 1$,

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(9)(1)}}{2(9)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = \frac{-6 \pm 0}{18}$$

Luego, las soluciones son $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$ ■

■ **Ejemplo 2.11** Encontrar las dos raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$. Utilizando la ec. 2.3, y notando que $a = 1, b = -2$ y $c = 5$,

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Como la raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución real, la ecuación no tiene solución real. ■

Observar que el radicando de la ec. 2.3, que se denomina discriminante, determina la cantidad de soluciones reales de la ecuación:

- Si $d < 0$ no tiene solución real.
- Si $d > 0$ tiene dos raíces reales distintas.
- Si $d = 0$ las raíces son reales e iguales.

Ejercicios

Ejercicio 2.5 Dadas las siguientes ecuaciones y sus soluciones, determinar a cuál de las ecuaciones corresponde cada solución y determinar el grado que tiene cada ecuación.
Ecuaciones:
a) $9 = 5y - 3$
b) $6y + 5 = 2y + 7$
c) $\frac{2}{x+1} = 2x + 5$
d) $3x^2 - 6 = (x+2)(x-3)$
Soluciones:
a) -0.5
b) -3
c) 2.4
d) $\frac{1}{2}$
e) 0
f) $-\frac{1}{2}$
■

Ejercicio 2.6 Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado
a) $2t^2 + 4t - 6 = 0$
b) $(t+7)(t-1) + (t+1)^2 = 0$
c) $x^2 - x - 2 = 0$
d) $(v+7)(v-3) = 0$
e) $t^2 + 4t = 0$
f) $t^2 - 1 = 0$
■

Ejercicio 2.7 Sin resolver las ecuaciones determinar el carácter de sus raíces (iguales, distintas, no reales)
a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
b) $2t^2 - 4t + 1 = 0$
c) $x^2 + 4x + 6 = 0$
■

Ejercicio 2.8 Utilizando el discriminante, decir qué tipo de soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$
b) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x - 3 = 0$
c) $x^2 - 2x + 14 = 0$
d) $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$

■

Ejercicio 2.9 a) Efectuar el producto de $(x-4)\cdot(x-3)$
b) Resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12$
c) ¿Existe alguna relación entre los coeficientes -7 y 12 con las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$?

■

Ejercicio 2.10 Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ con $b, c \in \mathbb{R}$ cuyas raíces son x_1 y x_2, demostrar que $x_1 + x_2 = -b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$ ■

Ejercicio 2.11 El cuadrado de un número entero es igual al siguiente multiplicado por -4. ¿Cuál es el número? ■

Ejercicio 2.12 ¿Cuál es el número cuyo triple supera en dos a su cuadrado? ■

Ejercicio 2.13 Para convertir temperaturas de grados Fahrenheit (F) a grados centígrados (C) se utiliza la siguiente fórmula

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Despejar F. ¿Para qué sirve esta nueva fórmula? ■

Ejercicio 2.14 Dadas las constantes a, b, c, d, donde $a \neq c$, hallar x si se cumple que $ax + b = cx + d$.
■

2.4 Ecuaciones con dos incógnitas

Hasta ahora se han visto ecuaciones con una única incógnita. Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene la forma

$$ax + by + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esta ecuación tiene como solución un par de valores (x, y) que la satisfacen. A este tipo de ecuaciones también se las suele llamar ecuaciones lineales. La linealidad está dada por el hecho de que ambas incógnitas están elevadas a la potencia uno y no se multiplican entre sí.

■ **Ejemplo 2.12** $x - 2y = 0$ es una ecuación lineal en dos variables: x e y, tiene infinitas soluciones como ejemplo:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x = 5 \\ y = 5/2 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} ; \text{etc}$$

También se pueden escribir en forma de pares ordenados:

$(x,y):(4,2);(5,5/2);(2,1);(-4,-2)$. ■

■ **Ejemplo 2.13** Un comercio vende calculadoras aritméticas a US$ 7.50 y científicas a US$ 18.00. Cierto día, el comercio vendió 16 calculadoras por un importe total de $193.50. ¿Cuántas calculadoras eran artiméticas?
Solución Primero se debe identificar que hay dos tipos de calculadoras en venta. Si se llama x a la cantidad de calculadoras aritméticas e y a la cantidad de calculadoras científicas, se puede traducir el problema al lenguaje algebraico de la siguiente manera: El total de calculadoras vendidas se escribe como

$$x+y=16$$

El monto total de la venta se escribe como

$$7.50x+18.00y=193.50$$

Estas dos ecuaciones determinan el sistema

$$\begin{cases} x+y=16 \\ 7.50x+18.00y=193.5 \end{cases}$$

Resolverlo implica encontrar valores para las incógnitas x e y que satisfagan simultáneamente las dos ecuaciones.
Una forma de resolverlo es despejando x o y de la primera ecuación, por ejemplo

$$x=16-y$$

Con esta expresión se sustituye a la x de la segunda ecuación,

$$7.50(16-y)+18.00y=193.5$$

Operando algebraicamente se obtiene

$$10.50y=73.5$$

y despejando y se obtiene $y=7$. Reemplazando en $x=16-y$, se obtiene que $x=9$.
Se realiza la verificación del resultado en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 9+7=16 \\ 7.50(9)+18.00(7)=193.5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el par $(x,y)=(9,7)$ es la solución matemática del sistema.
La respuesta al problema es: El comercio vendió 9 calculadoras aritméticas. ■

2.5 Sistemas de ecuaciones y resolución de problemas

Los sistemas lineales aparecen frecuentemente en situaciones de la física, química, ciencias naturales, así como también en economía, psicología, sociología, etc.
Hay métodos convencionales de resolución de sistemas lineales: **Sustitución**, **Eliminación (o Reducción por suma o resta)** e **Igualación**. Estos métodos se basan en una secuencia de operaciones elementales. Además hay otros métodos como Gauss y la Regla de Cramer.
Es importante aclarar que a los sistemas sencillos de dos y tres variables por lo general es más fácil de resolverlos por los métodos convencionales, mientras que para un sistema de más de tres variables es conveniente utilizar otros métodos.
Se mostrarán dos métodos de resolución de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Resolverlos es encontrar la solución, es decir, el valor de las incógnitas. Para ello se siguen ciertas técnicas que dependen de la situación de cada sistema, pues cualquier método de resolución de sistemas es válido, ya que proveen la misma solución.

2.5.1 Método de Sustitución

Como su nombre lo indica, se despeja una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Es la manera más natural de resolver un sistema.

Pasos a seguir para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con este método:

1. Elegir una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas en términos de la otra. En general, es la incógnita más fácil de despejar
2. Sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación, por lo que habrá una ecuación con una incógnita que se podrá resolver.
3. Con el resultado obtenido, se utiliza en la ecuación despejada en el primer paso para obtener el valor de la otra incógnita.
4. Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.

Ejemplo 2.14 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$$

1. Después de observar ambas ecuaciones, se puede despejar y de la primera ecuación
$$2x+3y=1 \rightarrow y=\frac{1-2x}{3}$$
2. Con la expresión obtenida se reemplaza a y en la segunda ecuación
$$2x-6\left(\frac{1-2x}{3}\right)=2$$
Esta ecuación es de primer grado y tiene una única incógnita, cuya solución es $x=\frac{2}{3}$
3. Se busca el valor de y sustituyendo a x por su solución la primera ecuación
$$2\left(\tfrac{2}{3}\right)+3y=1 \rightarrow y=\frac{1-\frac{4}{3}}{3}=-\frac{1}{9}$$
Luego la solución matemática es $(x,y)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{9}\right)$
4. Se sustituye a (x,y) por sus valores en el sistema de ecuaciones para verificar la solución obtenida
$$\begin{cases} 2\left(\frac{2}{3}\right)+3\left(-\frac{1}{9}\right)=1 \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)-6\left(-\frac{1}{9}\right)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1 \\ \frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2 \end{cases}$$
Como se verifican ambas ecuaciones, la solución es $(x,y)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{9}\right)$.

■

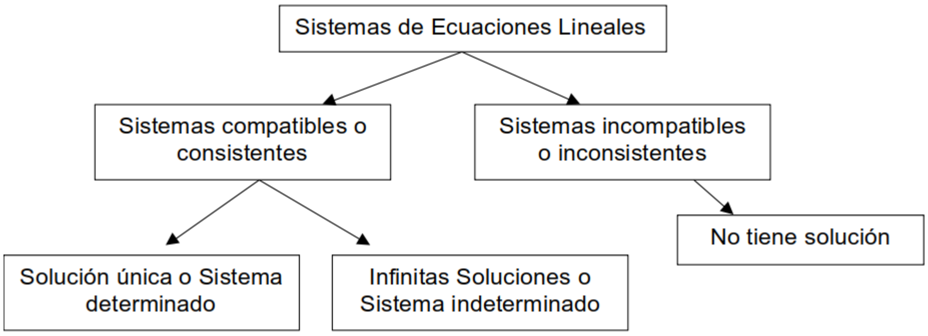
Dados $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{R}$, se han analizado sistemas del tipo

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

Resolver el sistema de ecuaciones 2.4 es encontrar el par (x_0,y_0) que será solución del sistema sí y sólo sí verifica ambas ecuaciones simultáneamente, es decir,

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=c_1 \\ a_2x_0+b_2y_0=c_2 \end{cases} \tag{2.5}$$

El sistema 2.4 puede tener una o infinitas soluciones, o no tener solución alguna, como se observa en el siguiente cuadro:



Ejercicios

Ejercicio 2.15 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a) $\begin{cases} 3x+2y=78 \\ 4x+y=54 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x-3y=24 \\ \frac{x}{5}=\frac{y}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+2y=14 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x-3y=12 \\ 6x+5y=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x+7y=4 \\ -\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}y=4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x-5y=3 \\ 3x-5y=-10 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y-4=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-6y+12=0 \end{cases}$

■

Ejercicio 2.16 El predio donde se instalará una planta de molienda de nueces es rectangular. El perímetro del predio mide 17000 cm y el largo mide 100 dm más que el doble del ancho. ¿Cuáles son las medidas del predio en metros? ■

Ejercicio 2.17 La suma de dos números es 81 y la diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62. ¿Cuáles son esos números? ■

Ejercicio 2.18 Se necesitaron 30 km de cerca para cercar un predio de una planta que es rectangular. ¿Cuáles son las dimensiones del predio si se sabe que la diferencia entre la longitud y el ancho es de 5 km? ■

2.5.2 Método de Reducción por suma o resta o de Eliminación

El método de reducción consiste en transformar el sistema dado en uno equivalente.
Primero se debe ver si alguna de las incógnitas tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones. Si no es así, se trata de acomodar las ecuaciones para que así lo sea. Luego, restando o sumando miembro a miembro las ecuaciones, se obtiene una ecuación con una incógnita menos. Esto quiere decir que se redujo el número de incógnitas, de allí el nombre de reducción o eliminación.

Pasos a seguir

1. Se preparan ambas ecuaciones, multiplicando (o dividiendo) por una constante adecuada para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones. El signo no necesariamente debe ser el mismo.
2. Se resta (o suma, según el signo del coeficiente) miembro a miembro ambas ecuaciones de manera tal que una de las incógnitas desaparezca. De esta manera se reduce también el número de ecuaciones, que será una sola.
3. Se resuelve la ecuación obtenida.
4. El resultado obtenido para la incógnita se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones originales, para obtener la solución de la otra incógnita.
5. Verificar la solución obtenida en ambas ecuaciones.

Ejemplo 2.15 Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ 3x-5y=1 \end{cases}$$

En el sistema se puede observar que x tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones. Por lo tanto, restando miembro a miembro se obtiene

$$\begin{cases} \begin{array}{rr} & 3x+y=7 \\ - & \underline{3x-5y=1} \\ & 0x+y-(-5y)=7-1 \end{array} \end{cases}$$

Luego $6y=6$, por lo que $y=1$. Reemplazando y en la primera ecuación $3x+1=7$, $3x=6$ por lo que $x=2$.
Verificación:

$$\begin{cases} 3x+y=7 \\ 3x-5y=1 \end{cases} = \begin{cases} 3\cdot 2+1=7 \\ 3\cdot 2-5\cdot 1=1 \end{cases}$$

Por lo tanto la solución única es $(x_0,y_0)=(2,1)$ ■

Ejercicios

Ejercicio 2.19 Resolver los siguientes sistemas por el método de eliminación

a) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ -2x-2y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-y=12 \\ x+y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y=0 \\ 3x-4y=-\frac{19}{2} \end{cases}$

■

Ejercicio 2.20 Dos amigos fueron de visita a una granja en la que había pavos y corderos. Al salir, uno de ellos le preguntó al otro cuántos pavos y corderos había. Averígualo, le dijo el otro, vi 72 ojos y 122 patas. ■

Ejercicio 2.21 Un galpón de empaque de fruta tiene cámaras con un solo motor y otra con dos motores. Si tiene un total de 50 cámaras y 87 motores, ¿cuántas cámaras de cada tipo tiene? ■

Ejercicio 2.22 Una planta de tomates vende las latas al costo de $8 cada una, y a quienes trabajan en la misma se les hace un descuento de $2. En una tarde se vendieron 525 latas y se recaudaron $358. ¿Cuántas latas se vendieron al público general y cuántas a sus trabajadores? ■

Ejercicio 2.23 El perímetro de un triángulo isósceles es de 18 cm. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base. ¿Cuáles son las medidas de los lados en metros? ■

2.5.3 ¿Cómo plantear y resolver problemas?

Hasta ahora se han visto problemas sencillos, por lo que se verán ahora gran cantidad de problemas resueltos de mayor complejidad.
En los problemas se plantean la o las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas. Lo difícil es identificar la información que lleva a la ecuación que se debe resolver. Esto se debe a que parte de la información no está explícitamente establecida.
Observe a continuación la forma en que se utilizan las expresiones algebraicas para plantear ecuaciones lineales y/o cuadráticas en algunas de sus aplicaciones. Ellas y sus soluciones son de gran importancia en todos los campos de la tecnología e ingeniería, y de la ciencia en general.

Pasos útiles para resolver problemas

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

1. Comprender el problema.

- Leer el enunciado. Señalar cuáles son los datos, es decir, qué es lo que se conoce del problema.
- Elaborar, si es necesario, un mapa conceptual o un esquema de la situación.
- Encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.
- Introducir una notación adecuada.
- Si hay alguna figura relacionada con el problema, realizar el esquema.

En síntesis, deben plantearse las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición que relaciona los datos con las incógnitas?
- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Es redundante? ¿Es contradictoria?

2. Concebir un plan. Se tiene un plan cuando se sabe, al menos a *grosso modo*, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se han de efectuar para determinar la incógnita.
Para concebir un plan se debe tener claro si los conocimientos son suficientes, ya que es imposible resolver un problema si se desconoce por completo el tema del cual trata.
Con frecuencia es adecuado abordar un problema planteando las siguientes preguntas:

- ¿Se ha resuelto previamente un problema semejante? o ¿Se ha resuelto previamente el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?

- ¿Se conoce un problema relacionado con éste?

Si no se puede resolver el problema propuesto, se trata de resolver primero algún problema similar más sencillo que aporte información al problema actual.

3. Ejecutar el plan. Esta etapa también debe ser planteada de manera flexible, alejada de los mecanicismos.
Se debe tener presente que el pensamiento no es lineal, que necesariamente se van a producir saltos entre el diseño del plan y su puesta en práctica. Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos. ¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?
Antes de hacer alguna operación se debe pensar ¿qué se consigue con esto?. Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación de lo que se hace y para qué.
Cuando se tropieza con alguna dificultad con la que no se puede avanzar, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

4. Examinar la solución obtenida. Se debe leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Se debe poner atención en la solución. ¿Es lógicamente posible? ¿Es posible comprobar la solución? ¿Es posible encontrar otra solución? Siguiendo estos cuatro

pasos se puede tener una buena idea y base para pensar acerca de cómo encarar distintas situaciones problemáticas y adquirir una mayor habilidad para resolverlos, ya que será útil para cuando estos problemas se presenten a lo largo de la carrera universitaria.

Ejemplo 2.16 Un lado de un triángulo isósceles mide 3 cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 cm. ¿Cuánto mide cada lado?
Solución

1. Comprender el problema.
   a) Primero se lee el problema y se determina qué se pide. Es decir, se ubican cuál o cuáles son las incógnitas introduciendo la notación de la incógnita, x. en este ejemplo, x representa la longitud de uno de los dos lados iguales del triángulo, e y representa al lado desigual.
   b) Considerar los datos.
   Uno de los datos es que el lado desigual mide 3 cm menos que la suma de los dos lados iguales, es decir $y = 2x - 3$.
   Otro dato es que el perímetro es de 33 cm, es decir, $2x + y = 33$.
2. Concebir un plan.
   De acuerdo al punto anterior, se obtuvieron dos ecuaciones con dos incógnitas
   $$\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 2x + y = 33 \end{cases}$$
3. Ejecutar el plan.
   Implica resolver el sistema de ecuaciones, por cualquier método a menos que se indique lo contrario. Se obtiene que $x = 9$ cm, $y = 15$ cm, que es la solución matemática del sistema.
4. Examinar la solución obtenida.
   Se verifica que la solución matemática es la solución del problema. Según la notación adoptada los lados iguales miden 9 cm, mientras que el tercer lado mide 15 cm. El perímetro, que es la suma de las longitudes de los tres lados, es $9 + 9 + 15 = 33$, por lo que se verifica el resultado.
   Luego, $x = 9$ cm e $y = 15$ cm es la solución del problema.

Respuesta: Las longitudes de los lados del triángulo son 9 cm, 9 cm y 15 cm. ■

■ **Ejemplo 2.17** En una embotelladora de jugos han preparado 60 litros de jugo de ananá con el 10% de jugo puro de fruta. La laboratorista se da cuenta de que hubo un error, ya que la concentración de jugo puro debe ser del 20%. ¿Cuánto juego puro de ananá deben agregarle para que la bebida contenga el 20% de dicho jugo puro.

Solución

1. Comprender el problema.
   - Lectura comprensiva del texto.
   - ¿Cuál es la incógnita?
     Cantidad de jugo de ananá que se le deben agregar a los 60 litros de bebida para que resulte uno con el 20% de jugo puro de ananá.
   - ¿Cuáles son los datos?
     60 litros de refresco de ananá con el 10% de jugo de fruta.
2. Concebir un plan.
   Sea x la cantidad (medida en litros) de jugo de ananá que debe agregarse. Se puede hacer una tabla que representa las relaciones entre los datos y la incógnita.

	Se tiene	Se agrega jugo puro	Se obtiene
Cantidad en litros de bebida	60 L	x L	60+x L
Concentración de jugo puro de ananá	10%	100%	20%
Cantidad de jugo puro de ananá en litros	10% de 60 L = 6 L	100% de x L = x L	20% de $(60+x)$ L = $0,2(60+x)$ L

   El aspecto clave para convertir la información de la tabla en una ecuación, es observar que la cantidad total de jugo puro de ananá en la nueva mezcla debe ser igual a la que contenía, más la que se agrega: $6+x=0,2(60+x)$
3. Ejecutar el plan.
   Resolviendo la ecuación planteada se obtiene que

$$\begin{aligned}12+0,2x&=6+x\\12-6&=x-0,2x\\6&=0,8x\\x&=6/0,8=7,5\end{aligned}$$

4. Examinar la solución obtenida.
   Se deja como ejercicio la comprobación.

Respuesta: Se deben agregar 7,5 L de jugo puro de ananá para que el refresco tenga una concentración del 20%. ■

■ **Ejemplo 2.18** Una máquina tiene dos masas que en total suman 17 kg. Si una de ellas tiene una masa 3kg mayor a la otra, ¿cuáles son las masas respectivas?

Solución El problema pide calcular la masa de cada una de las partes que integran la máquina.
Sea m_1 la masa de la parte más liviana, con lo que se establece una de las incógnitas. La otra masa se notará m_2.
Como una de ellas tiene una masa 3 kg mayor a la otra,

$$m_2-m_1=3$$

A su vez, como la suma de las dos masas es 17 kg, se puede escribir

$$m_2 + m_1 = 17$$

Resolviendo por el método de eliminación, se obtiene que

$$2 \cdot m_2 = 20, \text{ luego } m_2 = 10 \text{ kg}$$

Reemplazando m_2 en la segunda ecuación

$$10 + m_1 = 17, \text{ luego } m_1 = 7 \text{ kg}$$

Se deja como ejercicio la comprobación. **Respuesta:** La masa menor es de 7 kg y la otra es de 10 kg. ■

■ **Ejemplo 2.19** Una solución de alcohol y agua contiene 2 L de alcohol y 6 L de agua. ¿Cuánto alcohol puro se debe añadir para que la solución resultante tenga $2/5$ de alcohol?
Solución Sea x el número de litros de alcohol que se debe añadir a la solución cuyo volumen es de 8 L.
Luego, la cantidad final de alcohol que se tendrá será de 2+x L, y el volumen de la mezcla resultante será 8+x. Por lo tanto, el volumen de alcohol final comparado con el volumen total correspondiente a la mezcla debe ser $2/5$. Es decir,

$$\frac{2+x}{8+x} = \frac{2}{5}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 5(2+x) &= 2(8+x) \\ 10+5x &= 16+2x \\ 5x-2x &= 16-10 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio la comprobación.
Respuesta: Se deben añadir 2 L de alcohol a la solución. ■

Ejercicios

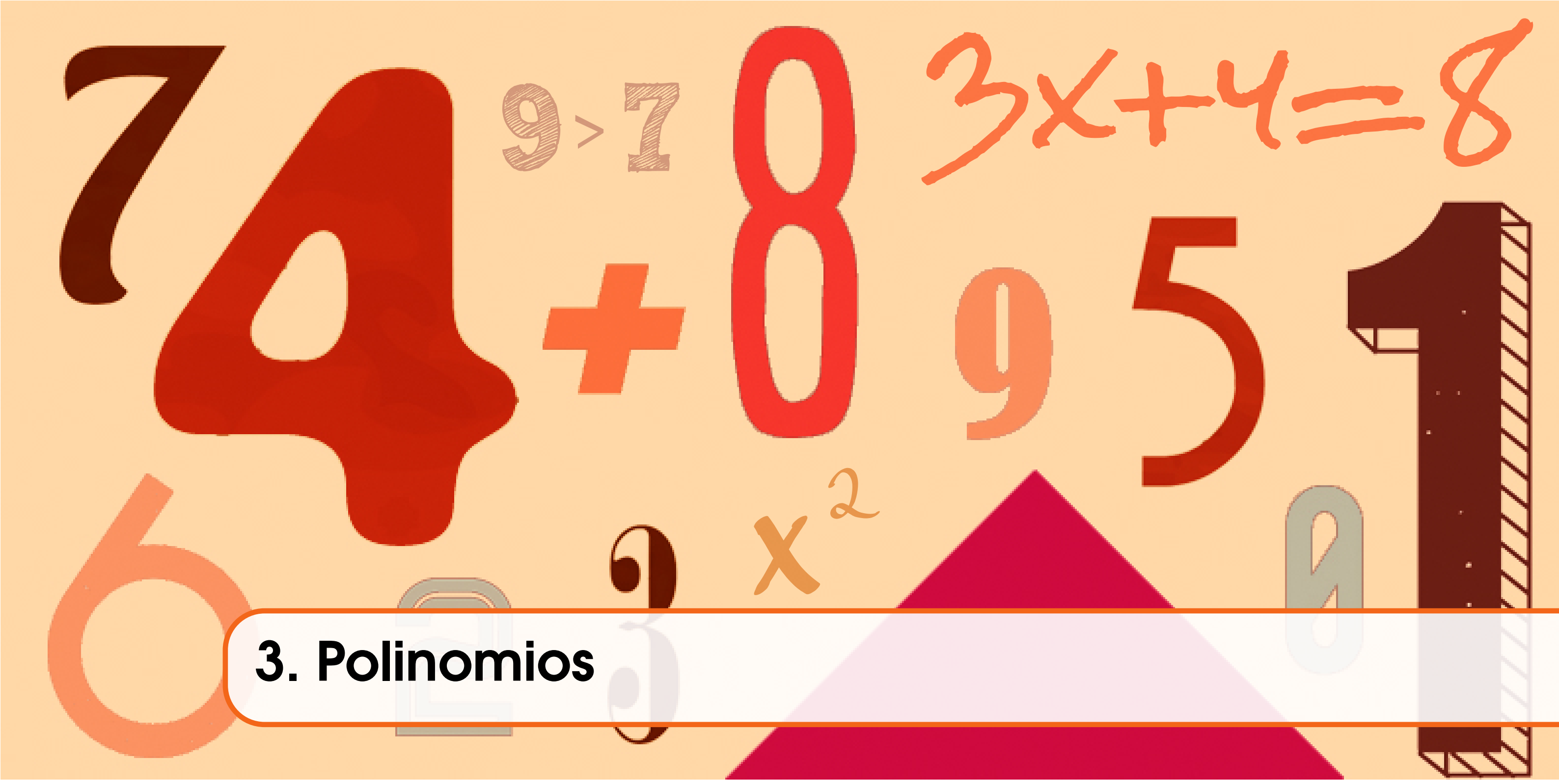
Ejercicio 2.24 ¿Qué cantidad de estaño se debe añadir a 40 kg de soldadura que contiene el 30% de estaño para elevar la concentración al 50%? ■

Ejercicio 2.25 Un mineral metálico contiene 22% de cobre y otro contiene 39%. ¿Cuántas toneladas de cada uno deben mezclarse para obtener 85 toneladas que contengan 34% de cobre? ■

Ejercicio 2.26 Una mezcla de concreto seco contiene 6% de cemento y 15% de arena. ¿Cuántos kilogramos de cemento y cuántos de arena se deben añadir a 500 kg de esta mezcla para obtener concreto con 10% de cemento y 20% de arena? ■

Ejercicio 2.27 Al trabajar conjuntamente 6 estampadoras lentas con dos rápidas producen 8000 partes en 4 días y cinco estampadoras lentas conjuntamente con cuatro mas rápidas producen 15000 partes en 5 días. ¿Cuántas partes por día produce una estampadora lenta? ¿Cuántas produce una estampadora rápida? ■

Ejercicio 2.28 En una cierta obra dos palas mecánicas excavan 20000 metros cúbicos de tierra trabajando la más grande 41 h y la otra 35 h. En otra obra las mismas excavan 42000 metros cúbicos trabajando la más grande 75 h y 95 la más pequeña. ¿Cuánta tierra puede remover cada una de ellas en 1 hora? ■



3. Polinomios

Para trabajar eficazmente en matemáticas, se debe operar convenientemente con expresiones algebraicas, de modo que se transformen las expresiones en otras idénticas pero más fáciles de manejar.

Objetivos del capítulo

- Adquirir destrezas para conseguir identidades que resulten más convenientes.
- Recordar las identidades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia, diferencia de cuadrados.
- Recordar las operaciones con polinomios.
- Aprender que la regla de Ruffini no sólo sirve para dividir un polinomio por $x-a$, sino que también es útil para evaluar polinomios.
- Descomponer los polinomios en factores cuando sus raíces sean enteras.
- Aprender que una fracción algebraica es el cociente indicado de dos polinomios y que se comportan de forma similar a las fracciones numéricas.
- La ejercitación estará destinada a adquirir práctica en el manejo y comprensión de la factorización, de las operaciones con polinomios y de las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

Repaso de conceptos básicos

Variables o indeterminadas: Se llaman así a las letras que se utilizan en los polinomios. Por convención se utiliza en primer lugar la x, si se necesitan más se utilizan $y, z, t, \ldots$

Constantes: son expresiones que representan números y acompañan a las variables, para ellas se usan las primeras letras del alfabeto: $a, b, c, \ldots$

Monomios: Son expresiones algebraicas en la que las variables están multiplicadas entre sí y/o por constantes.

Ejemplo 3.1

- x^2y
- $\frac{1}{3}x^3$
- $-\sqrt{5}xyz^2$

- $2at^2$
- $-5x$

■

La constante de los monomios se llama **coeficiente**. En el Ejemplo 3.1, son coeficientes $1, \frac{1}{3}, -\sqrt{5}, 2a, -5$ respectivamente. La o las variables de un monomio se la llama **parte literal** del monomio. El **grado** de un monomio está dado por el número de factores literales y se obtiene sumando los exponentes a los que están elevadas las variables.

■ **Ejemplo 3.2**
- x^2y es de grado 3 (o tercer grado).
- $\frac{1}{3}x^3$ es de tercer grado.
- $-\sqrt{5}xyz^2$ es de cuarto grado.
- $2at^2$ es de segundo grado.
- $-5x$ es de primer grado.

■

Las constantes son monomios de grado cero, sea k cualquier constante, entonces $k = k \cdot 1 = k \cdot x^0$.

Dos monomios del mismo grado, con las mismas variables elevadas a las mismas potencias, son semejantes.

■ **Ejemplo 3.3**
- $3x^2y^3$ y $-\frac{1}{2}x^2y^3$ son semejantes.
- $2x^5$ y ax^5 son semejantes.
- x^2y y $\frac{1}{3}x^3$ no son semejantes, aunque tienen el mismo grado.

■

Sumar o restar monomios semejantes es inmediato.

■ **Ejemplo 3.4**
- $2x^3 + 4x^3 = (2+4)x^3 = 6x^3$
- $7x^4 - 3x^4 = (7-3)x^4 = 4x^4$

■

La suma o resta de monomios no semejantes nunca es otro monomio.

■ **Ejemplo 3.5** $5x + 3x^2$ En este caso particular, la suma da un binomio como resultado. ■

Un **binomio** es la suma o resta de dos monomios no semejantes, un **trinomio**, de tres. En general, un **polinomio** es la suma algebraica de cualquier número de monomios no semejantes. En particular, un monomio es también un polinomio.

3.1 Conceptos básicos de polinomios

■ **Ejemplo 3.6**
a) $3xy^2 - 2x^2y + y$
b) $x^5 + 3x^2 - 3x + 2$

■

En adelante, se trabajará solamente con **polinomios de una sola variable** como el caso b) del Ejemplo 3.6. Este polinomio es suma de cuatro monomios no semejantes: $x^2, 3x^2, 3x$ y 2. Los coeficientes de estos monomios, llamados también coeficientes del polinomio son 1, 3, -3 y 2. Los grados de estos monomios son 5, 2, 1 y 0 respectivamente.
El **grado del polinomio** es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En esta caso el polinomio es de grado quinto (5).

Un **polinomio en una variable real** es una expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ son constantes llamadas **coeficientes del polinomio**, $n \geq 0$ es un número entero y x es la variable.

Si $a_n \neq 0$ este es el **coeficiente principal** y n el **grado del polinomio**. A los monomios sumandos de un polinomio se los llama **términos del polinomio**.

■ **Ejemplo 3.7**
- $A(x) = 3x^2 + x - 1$
- $B(x) = x^4 - 7x^3 + \frac{1}{2}x$
- $C(x) = \pi x + \sqrt[3]{2}$
- $D(x) = -28$
- $E(x) = 0$

■

$A(x), C(x), D(x)$ y $E(x)$ son polinomios completos porque están todas las potencias decrecientes de x, mientras que $B(x)$ es un polinomio incompleto porque faltan los términos de segundo y cero grado. $B(x)$ se puede completar agregando los términos con coeficientes iguales a cero: $B(x) = x^4 - 7x^3 + 0x^{@} + \frac{1}{2}x + 0$.
El polinomio $A(x)$ es de segundo grado, los coeficientes son 3, 1 y -1, siendo 3 el coeficiente principal. El polinomio $B(x)$ es de cuarto grado, los coeficientes son 1, -7, 0, $\frac{1}{2}$ y 0, siendo 1 el coeficiente principal. $C(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficientes π y $\sqrt[3]{2}$ y el coeficiente principal es π. $D(x)$ es un polinomio de grado cero, tiene un único coeficiente, que es también coeficiente principal y es -28. Por último $E(x)$ es el polinomio cero, que es el único polinomio al cual no se le asigna grado, ya que no tiene ningún coeficiente distinto de cero.

Luego, todo polinomio de grado n tiene $n+1$ coeficientes.

3.2 Operaciones con polinomios

3.2.1 Suma y resta

Para sumar dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes. A la resta de dos polinomios la transformamos en suma, sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

■ **Ejemplo 3.8** Sumar y restar los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1 \qquad Q(x) = x^4 - x^3 + 3x - 5$$

La forma práctica de sumar o restar es ubicando los polinomios uno debajo del otro, de manera que los términos semejantes queden en la misma columna.

Suma:

$$\begin{array}{ccccccc}
P(x) & = & 3x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & -4x^2 & +\frac{1}{2}x & +1 \\
Q(x) & = & x^4 & -x^3 & & +3x & -5 \\
\hline
P(x)+Q(x) & = & 4x^4 & -\frac{1}{2}x^3 & -4x^2 & +\frac{7}{2}x & -4
\end{array}$$

Resta:

$$\begin{array}{rcrrrrr} P(x) & = & 3x^4 & +\frac{1}{2}x^3 & -4x^2 & +\frac{1}{2}x & +1 \\ Q(x) & = & x^4 & -x^3 & & +3x & -5 \\ \hline P(x)-Q(x) & = & 2x^4 & +\frac{3}{2}x^3 & -4x^2 & -\frac{5}{2}x & +6 \end{array}$$

■

Ejercicios

Ejercicio 3.1 Sean $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3$; $Q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 11$ y $R(x) = 0$. Determinar

a) El grado de cada polinomio y sus respectivos coeficientes.
b) $S(x) = P(x) + Q(x)$
c) $T(x) = P(x) - Q(x)$
d) $U(x) = P(x) + R(x)$
e) el grado de $S(x), T(x)$ y $U(x)$.

■

Ejercicio 3.2 Calcular los valores de a, b, c y d para que se cumpla

a) $(3x^2 - 4x^3 + 2x - 5) + (4 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4) = 5x^4 - 3x^2 + x - 9$
b) $(3x^2 - 6x^5 + 7x^3 - 7x) - (dx - 7x^3 + cx^2 + bx + a) = 2x^2 - x + 3$

■

Ejercicio 3.3 Efectuar las operaciones indicadas y reducir la expresión resultante.

a) $3(x^3 - 5x + 7) - 4(x^3 + 5x^2 + 10x - 1)$
b) $8\left[\dfrac{3(x+2)}{4} + \dfrac{3x+5}{2} - 1\right]$

■

3.2.2 Multiplicación

El producto de dos monomios es otro monomio con coeficiente igual al producto de los coeficientes de los factores, y el grado es la suma de los grados de los factores.

■ **Ejemplo 3.9**
- $5x^3 \cdot (-2x^2) = -10x^5$
- $\frac{3}{2}x \cdot 8x = 12x^2$

■

Si se multiplica un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

■ **Ejemplo 3.10** $(3x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 5x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{10}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x^2$ ■

Para multiplicar polinomios, se hace aplicando reiteradamente la propiedad distributiva, es decir se multiplica cada término de uno por cada término del otro.

■ **Ejemplo 3.11** $(2x^2 - x + 5) \cdot (x + 2) = 2x^2(x + 2) - x(x + 2) + 5(x + 2) = 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x + 5x + 10 = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 10$ ■

■ **Ejemplo 3.12**

		$2x^4$	$-5x^3$		$-2x$	$+3$
x				x^2	$-x$	$+2$
		$+4x^4$	$-10x^3$		$-4x$	$+6$
	$-2x^5$	$+5x^4$		$+2x^2$	$-3x$	
$2x^6$	$-5x^5$		$-2x^3$	$+3x^2$		
$2x^6$	$-7x^5$	$+9x^4$	$-12x^3$	$+5x^2$	$-7x$	$+6$

■

3.2.3 Identidades notables

- **Cuadrado de un binomio**

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

- **Cubo de un binomio**

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

- **Suma por diferencia**

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a(a-b)+b(a-b) = a^2-ab+ba+b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

- $(a\pm b)^2 = a^2 \pm ab + b^2$
- $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

Las identidades notables son útiles en la factorización de polinomios, sirven para transformar una expresión algebraica en otras más sencillas.

■ **Ejemplo 3.13** $(x+3)^2-(x-1)^2 = (x^2+6x+9)-(x^2-2x+1) = 6x+9+2x-1 = 8x-8 = 8(x-1)$ ■

■ **Ejemplo 3.14** $x^2-12x+36 = (x-6)^2$ ■

Ejercicios

Ejercicio 3.4 Calcular

a) $2ax^2+5)^3$
b) $9x^6-\frac{1}{4}$
c) $(x^2+x+1)(x-4)$
d) $(2x^3-x+1)(x^2+x-1)$
e) $(2x^3-3x^2+5x-2)(x^2-x-2)$.

■

Ejercicio 3.5 Si el polinomio $A(x)$ es de tercer grado y $B(x)$ es de segundo grado ¿cuál es el grado de $A(x)\cdot B(x)$? ■

Ejercicio 3.6 Completar la siguiente multiplicación.

$$
\begin{array}{cccc}
 & \_\_\_\,x^2 & \_\_\_\,x & +\_\_\_ \\
\text{x} & & x & -\_\_\_ \\
\hline
 & \_\_\_\,x^2 & -14x & -\_\_\_ \\
\_\_\_\,^3 & 7x^2 & \_\_\_\,x^2 & \\
\hline
2x^3 & +3x^2 & -8x & -12
\end{array}
$$

■

Ejercicio 3.7 Desarrollar las siguientes expresiones

a) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2$
b) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$
c) $(3x-2)(3x+2)$
d) $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
e) $(x^2+25)(x^2-25)$.
f) $\left(-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}\right)^2$

■

Ejercicio 3.8 Factorear, es decir, expresar como productos.

a) x^2-6x+9
b) $16x^2-49$
c) x^2-3
d) x^3-3x^2+3x-1
e) $\frac{4}{25}-x^2$.
f) $\frac{1}{4}+x+x^2$

■

3.2.4 División de polinomios

El cociente de dos monomios, uno de grado m y otro de grado n, con $m \geq n$, es otro monomio, cuyo grado es la diferencia de los grados y el coeficiente se obtiene dividiendo los coeficinetes de los monomio dados, es decir,

$$ax^m : bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n}$$

■ **Ejemplo 3.15** a) $3x^6 : 2x^2 = \frac{3}{2}x^4$
b) $(-8x^4) : 4x^3 = -2x$
c) $(-3x^5) : \left(-\frac{3}{2}x^5\right) = 2$

■

Con un ejemplo, se procederá a mostrar la división de dos polinomios.

■ **Ejemplo 3.16** Dividir $P(x) = 2x^3 - x + 5x^4 + 1$ por $Q(x) = x^2 - 2x - 3$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +2x^3 & +0x^2 & -x & +1 & x^2-2x-3 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & +10x^3 & +15x^2 & & & 5x^2+12x+39 \\ \cline{1-3}
 & 12x^3 & +15x^2 & -x & & \\
 & -12x^3 & +24x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4}
 & & 39x^2 & +35x & +1 & \\
 & & -39x^2 & +78x & +117 & \\ \cline{3-5}
 & & & 113x & 118 &
\end{array}
$$

■

Pasos realizados

1. Se ordenan las potencias de manera decreciente del dividendo y el divisor, y se completa si es necesario el dividendo.
2. Para calcular el primer término del cociente, dividimos el término de mayor grado del dividendo por el término de mayor grado del divisor: $5x^4 : x^2 = 5x^2$.
3. El producto de $5x^2$ por $Q(x)$ (el divisor), se coloca debajo del dividendo y se resta.
4. El primer resto parcial es $12x^3 + 15x^2$. Se baja el término siguiente, en este caso $-x$, y se repiten los pasos 2) y 3).
5. El proceso del punto 4) se repetirá hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor. En el ejemplo 3.16, $C(x) = 5x^2 + 12x + 39$ y $R(x) = 113x + 118$.

Observar que en la división se ha notado $P(x)$ al dividendo, y $Q(x)$ al divisor, obteniéndose dos polinomios: El cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$. Es decir,

$$
\begin{array}{r|l}
P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2}
R(x) & C(x)
\end{array}
$$

Luego se puede decir que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.
También se puede expresar como la siguiente relación: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.
Es importante recordar que el resto $R(x)$ es un polinomio de grado menor al grado del divisor $Q(x)$ o es cero. Según esto, el resultado de la división en general no es un polinomio. Es decir, en el Ejemplo 3.16,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^3 - x + 5x^4 + 1}{x^2 - 2x - 3} = 5x^2 + 12x + 39 + \frac{113x + 118}{x^2 - 2x - 3}$$

Notar que el grado del cociente es la diferencia de los grados entre el dividendo y el divisor, mientras que el grado del resto es menor al de su denominador (el divisor). El último término es una expresión racional que se suma al cociente, por lo que la expresión anterior no es un polinomios.
Cuando en la división de polinomios el resto es distinto de cero, se la llama **división entera**. Cuando el resto es cero, la división es **exacta**.

■ **Ejemplo 3.17** División exacta:

$$(6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8) : (3x^2 + 2)$$

El cociente es el polinomio $2x^3 + x - 4$ y el resto es cero, por lo tanto,

$$\frac{6x^5 + 7x^3 - 12x^2 + 2x - 8}{3x^2 + 2} = 2x^3 + x - 4$$

Es posible observar que cuando la división es exacta, el cociente es un polinomio. ■

Ejercicios

Ejercicio 3.9 En una división de polinomios, el dividendo es de cuarto grado y el divisor de segundo grado.

a) ¿Cuál es el grado del cociente?
b) ¿Qué puede decir del grado del resto?

■

Ejercicio 3.10 Calcular las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{5x+7}{5x}$
b) $\dfrac{x^2+x+5}{x^2+x+1}$
c) $\dfrac{5x^2-4}{x+1}$
d) $\dfrac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2-4x+1}$
e) $\dfrac{2x^3-x+14}{x+2}$

■

Ejercicio 3.11 ¿Cuánto deben valer m y n para que la división

$$(x^4-x^3+5x^2+mx+n):(x^2+3x-1)$$

a) sea exacta?
b) su resto sea $\frac{1}{2}x-3$?

■

División de un polinomio por $x-a$

Los polinomios, en similitud con los números enteros, se pueden descomponer en producto de factores, luego, cada uno de esos factores divide al polinomio exactamente. El problema es determinar esos factores, es decir, teniendo el polinomio $P(x)$, ¿existirá algún polinomio distinto de él mismo y de 1 tal que se pueda dividir de modo que la división sea exacta.
La pregunta es difícil de responder en el caso general, por lo que se comenzará la búsqueda de esos divisores considerando polinomios especialmente simples, de la forma $x-a$. Para efectuar divisiones de este tipo se dispone de un recurso práctico conocido como **Regla de Ruffini**.

Regla de Ruffini

■ **Ejemplo 3.18** Dividir al polinomio $3x^4-2x^3+5x-1$ por $x-2$ usando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 3 & -2 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & & 6 & 8 & 16 & 42 \\ \hline & 3 & 4 & 8 & 21 & 41 \end{array}$$

$3,4,8$ y 21 son los coeficientes del cociente $C(x)=3x^3+4x^2+8x+21$, mientras que el resto es 41.
■

Pasos realizados

1. En la primera fila se colocan los coeficientes del polinomio completo y ordenado según las potencias decrecientes de x.
2. En la segunda fila, a la izquierda, se escribe el valor de a, en este caso, 2.

3. En la tercera fila, se coloca en primer lugar el coeficiente del término de mayor grado, en este caso 3.
4. Los siguientes valores de la segunda y tercera fila se obtienen de la siguiente manera: En la segunda fila debajo del coeficiente del segundo término del polinomio, se coloca el valor de la multiplicación entre el valor de a, y el valor de la tercer fila de la columna anterior, es decir, $2 \cdot 3 = 6$. Debajo, en la tercera fila, se coloca el resultado de sumar al valor de la primera fila con el de la segunda fila, es decir, $-2+6=4$.
5. El proceso del punto 4) se repetirá hasta terminar.
6. El último número, 41, es el resto de la división, es decir $R(x) = 41$

La regla de Ruffini se puede aplicar sólo cuando se divide a un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x-a$. El cociente $C(x)$ obtenido es un polinomio de grado menor en una unidad al de $P(x)$ y el resto $R(x)$ es una constante.

Del Ejemplo 3.18, se puede reescribir al dividendo como

$$3x^4 - 2x^3 + 5x - 1 = (x-2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 21) + 41$$

Dividiendo a ambos miembros de la expresión anterior por $(x-2)$ se puede expresar al cociente como

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 5x - 1}{x-2} = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 21 + \frac{41}{x-2}$$

el cual se puede observar que no es un polinomio.
En el caso de una división exacta el último término será nulo, luego el cociente sí será un polinomio.

■ **Ejemplo 3.19** Dividir al polinomio $x^3 + 4x^2 + 16x + 39$ por $x+3$ usando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 4 & 16 & 39 \\ -3 & & -3 & -3 & -39 \\ \hline & 1 & 1 & 13 & 0 \end{array}$$

El cociente es $C(x) = x^2 + x + 13$, mientras que el resto es 0. ■

Criterio de divisibilidad de polinomios: Si un polinomio tiene coeficientes enteros, para que sea divisible $x-a$ es necesario que su término independiente sea múltiplo de a.

Por lo tanto, para determinar expresiones $x-a$ que sean divisores de un polinomio con coeficientes enteros, se deben asignar valores al número a que dividan al término independiente.

■ **Ejemplo 3.20** Buscando los divisores del polinomio $x^2 + x - 2$, como el término independiente es -2, sus divisores son 1, -1, 2, y -2.
Utilizando $a = 1$, si se divide al polinomio por $x-1$ con la regla de Ruffini, se obtiene que

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Como el resto de la división es 0, la división es exacta. Luego, $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ o

$$\frac{x^2 + x - 2}{x-1} = x + 2$$

■

Ejercicios

Ejercicio 3.12 Usar la regla de Ruffini para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^2 - 2x^2 + 7x) : (x-2)$
b) $(6x^3 - x + x^4 - 10) : (x+3)$
c) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x+1)$
d) $\left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x - 3\right) : \left(x + \frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 3.13 ¿Cuánto debe valer m para que al dividir $x^3 - 2x^2 + mx - 15$ por $x-3$ la división sea exacta?

3.3 Teorema del resto

Teorema: El resto R de la división de un polinomio $P(x)$ por $(x-a)$ es igual al valor numérico del polinomio evaluado en $x = a$.
Es decir,

$$R = P(a)$$

El Teorema lo que dice es que si se divide al polinomio $P(x)$ por $(x-a)$, además de obtenerse un cociente, se obtiene un resto R. Además, el Teorema asegura que ese resto es igual a $P(a)$.

Demostración: Sabiendo que $P(x) = (x-a)C(x) + R$, sea $x = a$. Luego,

$$P(a) = (a-a)C(a) + R = 0 \cdot C(a) + R = R$$

Por lo tanto, $P(a) = R$, que es lo que se quería demostrar.

Ejemplo 3.21 ¿Cuál es el resto de la división de $P(x) = 2x^4 - 10x^2 - 7$ por $x-3$?

$$R = P(-3) = 2\cdot(-3)^4 - 10\cdot(-3)^2 - 7 = 2\cdot 81 - 10\cdot 9 - 7 = 162 - 90 - 7 = 65$$

El resto de la división es 65.

Una aplicación del Teorema del resto es la posiblidad de determinar, con cálculos sencillos, cuándo un polinomio es divisible por otro de la forma $(x-a)$, es decir: $P(x)$ es divisible por $x-a$ sí y sólo sí $R = 0$.

Ejemplo 3.22 ¿El polinomio $P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ es divisible por $x-3$?

$$R = P(-3) = (-3)^4 - 10\cdot(-3)^2 + 9 = 81 - 10\cdot 9 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0$$

Por lo tanto el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-3$.

Ejercicios

Ejercicio 3.14 Calcular el valor numérico del polinomio $5x^4 - 6x^2 + 2x + 3$ para

a) $x = 1$
b) $x = 0$
c) $x = 2$
d) $x = -1$
e) $x = \sqrt{2}$

Ejercicio 3.15 Calcular sin dividir, el resto de las siguientes divisiones

a) $(2x^6 - 3x^2 + 4x - 9) : (x+2)$
b) $(x^3 - 8) : (x-2)$
c) $(x^3 + 8) : (x-2)$
d) $(x^7 + x^5 + x^3 + x + 1) : (x+1)$

■

Ejercicio 3.16 a) Calcular el coeciente y el resto de la división $(x^5 - 7x^3 - 3x^2 - 8x - 3) : (x-3)$
b) Según el resultado encontrado, ¿se puede escribir al polinomio dividendo como producto de dos factores? Si la respuesta es afirmativa, escribirlo.

■

3.4 Raíces de un polinomio

Un número real a es raíz del polinomio $P(x)$ si a es solución de la ecuación

$$P(x) = 0 \tag{3.1}$$

Es decir que si se reemplaza en el polinomio a la x por la a, ésta verifica la ec. 3.1.

Si a es raíz de $P(x)$ entonces el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-a$, por lo tanto a $P(x)$ se lo puede expresar como

$$P(x) = (x-a)C(x)$$

donde $C(x)$ es el cociente de dividir a $P(x)$ por $x-a$

■ **Ejemplo 3.23** ¿Es 2 raíz del polinomio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$?
Notar que al calcular $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 28 \cdot 2 + 48 = 0$.
Como $P(2) = 0$, 2 es raíz de $P(x)$, por lo tanto $P(x)$ es divisible por $x-2$. Luego aplicando la regla de Ruffini se puede determinar $C(x)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -2 & -28 & 48 \\ 2 & & 4 & 4 & -48 \\ \hline & 2 & 2 & -24 & 0 \end{array}$$

Luego $C(x) = 2x^2 + 2x - 24$, y por lo tanto

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 2x - 24)$$

Notar que $P(x)$ está expresado como producto de dos polinomios, uno de primer grado, $x-2$, y otro de segundo grado, $2x^2 + 2x - 24$. Por lo tanto, se puede analizar la posibilidad de encontrar un facto $x-a$ que divida al polinomio $C(x)$.
El término independiente, 24, es múltiplo de 3, por lo que se puede averiguar si 3 es raíz de $C(x)$. Luego $C(3) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 24 = 2 \cdot 9 + 6 - 24 = 0$ por lo que 3 es raíz de $C(x)$ y $C(x)$ es divisible por $x-3$. Aplicando la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 2 & -24 \\ 3 & & 6 & 24 \\ \hline & 2 & 8 & 0 \end{array}$$

con lo que $C_1(x) = 2x + 8$ y por lo tanto $C(x) = (x-3)(2x+8)$.
Por lo tanto,

$$P(x) = (x-2)(x-3)(2x+8) = (x-2)(x-3)2(x+4) = 2(x-2)(x-3)(x+4)$$

es decir, se ha logrado una **factorización completa** de $P(x)$. ■

Si el polinomio $P(x)$ es de grado n, entonces tiene como máximo n raíces.

3.4.1 Factor común

En el polinomio $C_1(x) = x+8$ del ejemplo 3.23, como el número 2 divide a ambos términos, se lo pudo extraer como factor común, es decir, se pudo expresar $C_1(x) = 2(x+4)$.
Siempre es conveniente realizar esas extracciones al inicio y luego continuar con la factorización, al contrario de como se hizo en el ejemplo.
Analizando nuevamente el polinomio del ejemplo, $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48$, se observa que todos los coeficientes son múltiplos de 2, luego 2 es factor común y se puede reescribir

$$P(x) = 2(x^3 - x^2 - 14x + 24)$$

3.4.2 Factorización de polinomios

¿Qué es factorear un polinomio y cómo se hace? Factorear o factorizar un polinomio es expresarlo como

producto de factores, es decir, en el ejemplo 3.23, $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 28x + 48 = 2(x-2)(x-3)(x+4)$ es el polinomio factorizado.
Analizando la expresión factorizada del polinomio, se observa que el número 2 es igual al coeficiente principal del polinomio. Además, los términos independientes de cada uno de los factores de primer grado, cambiados de signo, es decir 2, 3 y -4, son las raíces de $P(x)$.
Esta forma de factorear el polinomio $P(x)$ es en realidad un caso particular del siguiente resultado general.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son raíces del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, es decir, si se verifica que

$$P(r_1) = 0; P(r_2) = 0; \ldots; P(r_n) = 0$$

entonces el polinomio puede escribirse de la forma

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$$

llamada **descomposición factorial del polinomio**.

■ **Ejemplo 3.24** Factorizar los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} A(x) &= x^5 - 9x^3 \\ B(x) &= x^2 - 8x + 16 \\ D(x) &= x^4 - 1 \\ E(x) &= 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5 \\ F(x) &= x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x \end{aligned}$$

1. Sacar factor común, siempre que sea posible.
   Notar que los polinomios $A(x)$ y $F(x)$ tienen un factor común distinto de 1, por lo que se los extrae.

$$A(x) = x^5 - 9x^3 = x^3(x^2 - 9)$$

$$F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$$

2. Utilizar las identidades notables.

$$A(x) = x^3(x^2 - 9) = x^3(x-3)(x+3)$$

Luego $A(x)$ está totalmente factorizado.
Los polinomios $B(x)$ y $D(x)$ son igualdades notables: cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados respectivamente. Luego,

$$B(x) = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 = (x-4)^2$$
$$D(x) = x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

Luego $B(x)$ y $D(x)$ están totalmente factorizados.

En los polinomios $E(x)$ y $F(x)$, no es posible utilizar ninguna igualdad notable. Para lograr su factorización, se utilizará el método de las raíces. Recordando que $F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$, luego, 0 es raíz del polinomio y $F(x) = xQ_1(x)$, donde $Q_1(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.
El término independiente de $Q_1(x)$ es 6, y sus divisores son $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6. Para determinar cuáles son raíces, se puede ir probando reemplazando el valor en $Q_1(x)$ hasta que éste resulte 0. Luego,

$$Q_1(1) = 1^4 + 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 6 = -8 \neq 0$$
$$Q_1(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 6 = -12 \neq 0$$
$$Q_1(2) = 2^4 + 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 6 = 0$$

por lo que 2 es raíz de $Q_1(x)$, y se divide a $Q_1(x)$ por $x-2$.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto

$$Q_2(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$$
$$Q_1(x) = (x-2)(x^3 + 3x^2 + x + 3) = (x-2)Q_2(x)$$

Se repite el proceso con $Q_2(x)$, donde los divisores de 3 son ± 1 y ± 3. Dado que anteriormente se encontró que ± 1 no son raíces de $Q_1(x)$, directamente se prueba con ± 3.

$$Q_2(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 + 3 = 60 \neq 0$$
$$Q_2(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + (-3) + 3 = 0$$

Luego, se divide a $Q_2(x)$ por $x+3$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo que $Q_3(x) = x^2 + 1$, y $Q_2(x) = (x+3)Q_3(x) = (x+3)(x^2+1)$.
Como $Q_3(x)$ no tiene raíces reales, no se sigue realizando el proceso, y se obtiene que

$$F(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = xQ_1(x) = x(x-2)Q_2(x) = x(x-2)(x+3)Q_3(x) = x(x-2)(x+3)(x^2+1)$$

que es la factorización completa del polinomio $F(x)$.
Ahora se factorizará el polinomio $E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$. El término independiente es 5, luego sus divisores son ± 1 y ± 5. Realizando el cálculo,

$$E(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = -8 \neq 0$$
$$E(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 0$$

Luego -1 es raíz, y se divide a $E(x)$ por $x+1$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -9 & -6 & 5 \\ -1 & & -2 & 11 & -5 \\ \hline & 2 & -11 & 5 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, $E(x) = (x+1)(2x^2 - 11x + 5)$.
Para factorizar el polinomio $2x^2 - 11x + 5$ se puede utilizar Ruffini o el cálculo de raíces con Bhaskara:

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

Por lo tanto, las raíces son $x_1 = 5$ y $x_2 = \frac{1}{2}$.
Luego, $Q(x) = 2x^2 - 11x + 5 = (x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
Finalmente,

$$E(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5 = (x+1)(x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

queda totalmente factorizado. ■

Pasos realizados

- Determinar alguna de las raíces enteras de $P(x)$ utilizando los divisores del término independiente. Sea a esta raíz.
- Efectuar la división de $P(x)$ por $(x-a)$ determinando otro polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x-a)Q(x)$.
- Repetir el proceso con $Q(x)$ hasta obtener un polinomio que no se pueda descomponer. De esta manera se obtiene la factorización completa de $P(x)$.

Ejercicios

Ejercicio 3.17 En las siguientes expresiones, extraer todos los factores comunes.

a) $6a^3b - 8abc + 4a^2b^2c^2$
b) $2x^6 - \frac{2}{5}x^4 + 2x^3$
c) $4x^5 - 36x^4$

■

Ejercicio 3.18 Resolver sin calcular: ¿Por qué 2 y 3 no son raíces del polinomio $2x^4 - x^2 - x + 11$?
■

Ejercicio 3.19 a) ¿Por qué $x-1, x+1, x-2, x+2, x-4$ y $x+4$ son posibles divisores de $x^3 - x^2 - 4x + 4$?
b) Factorear el polinomio dado.

■

Ejercicio 3.20 Factorear los siguientes polinomios

a) x^3+6x^2-x-30
b) $4x^5-44x^3+40x$
c) $2x^3-3x^2-8x+12$
d) x^3+8
e) $3x^5-3$
f) x^4-16

Ejercicio 3.21 Escribir un polinomio

a) Con raíces $-2,3$ y 5.
b) De cuarto grado con raíces $-2,3$ y 5.

3.5 Expresiones algebraicas fraccionarias

Una expresión algebraica fraccionaria o expresión algebraica racional es el cociente de dos polinomios, es decir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } Q(x) \neq 0.$$

Ejemplo 3.25

- $\frac{x}{x^3-3}$
- $\frac{1}{x-1}$
- $\frac{x^2-2x+5}{x^3+5x-10}$
- $\frac{8x-7}{3}$

Las expresiones algebraicas racionales son en muchos aspectos, muy semejantes a los números racionales. Así, por ejemplo, en a) x es el numerador y x^3-3 es el denominador de la expresión algebraica.
Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no tienen factores en común (excepto 1 y -1) se dice que es una expresión irreducible.

Ejemplo 3.26

- $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{(x+1)}{(x-5)}$
- $\frac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2} = \frac{x^2(x^3-2)}{x^2(x^2+x-6)} = \frac{x^2(x-2)(x^2+2x+4}{x^2(x-2)(x+3)} = \frac{x^2+2x+4}{x+3}$

Dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes sí y sólo sí

$$P(x)S(x) = R(x)Q(x)$$

Ejemplo 3.27

- $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$ es equivalente a $\frac{(x+1)}{(x-5)}$

- $\dfrac{x^5-8x^2}{x^4+x^3-6x^2}$ es equivalente a $\dfrac{x^2+2x+4}{x+3}$

Estas expresiones se obtienen simplificando. ■

■ **Ejemplo 3.28** $\dfrac{x-1}{x^3-x^2+x-1}$ es equivalente a $\dfrac{x^2-1}{x^4-1}$.

Ambas se pueden simplificar y son iguales a $\dfrac{1}{x^2+1}$.

Se deja como ejercicio la verificación. ■

Se pueden hallar expresiones equivalentes para que tengan el mismo denominador, es decir, se las reduce a común denominador.

■ **Ejemplo 3.29** Reducir a común denominador las expresiones

$$\frac{4x+1}{x};\quad \frac{x+2}{x+1};\quad \frac{x-3}{x(x+1)}$$

Se procede como cuando se trabaja con fracciones, es decir, se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores factorizados:

$$mcm(x,x+1,x(x+1))=x(x+1)$$

Éste será el denominador de las tres expresiones. Luego, el numerador estará determinado por el resultado de la multiplicación del numerador original por el resultado de la división del *mcm* por el denominador original. Con lo cual, se obtienen las expresiones.

$$\frac{(4x+1)(x+1)}{x(x+1)};\quad \frac{x(x+2)}{x(x+1)};\quad \frac{x-3}{x(x+1)}$$

Notar que la última expresión no se modificó porque su denominador coincide con el *mcm* ■

3.5.1 Suma y Resta

Para sumar expresiones algebraicas racionales, se reducen a común denominador y se suman los denominadores resultantes.

■ **Ejemplo 3.30** a) $\dfrac{x+1}{3x}+\dfrac{2x-3}{x^2-2x}+\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{3x(x-2)}+\dfrac{3(2x-3)}{3x(x-2)}+\dfrac{3x(x+2)}{3x(x-2)}$
$=\dfrac{(x^2-x-2)+(6x-9)+(3x^2+6x)}{3x^2-6x}=\dfrac{4x^2+11x-11}{3x^2-6x}$

b) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{x+(-1)}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$

■

3.5.2 Producto

El producto de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar los numeradores dividida por la multiplicación de los denominadores.

■ **Ejemplo 3.31** a) $\dfrac{5x+2}{x}\cdot\dfrac{5x-2}{x+1}=\dfrac{(5x+2)(5x-2)}{x(x+1)}=\dfrac{25x^2-4}{x^2+x}$

b) $\dfrac{x+3}{x-3}\cdot\dfrac{1}{(x+3)^2}=\dfrac{x+3}{(x-3)(x+3)^2}=\dfrac{1}{x^2-9}$

■

3.5.3 Cociente

El cociente de dos expresiones algebraicas racionales es igual a la expresión que resulta de multiplicar la primera expresión por la segunda invertida, es decir, con su numerador como denominador y con su denominador en el numerador.

Ejemplo 3.32 a) $\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}\cdot\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\cdot\dfrac{x}{x+1}=x-1$

b) $\dfrac{x+3}{x-3}:\dfrac{1}{(x+3)^2}=\dfrac{x+3}{x-3}\cdot(x+3)^2=\dfrac{(x+3)^3}{x-3}$

c) $\dfrac{5x+2}{x}:\dfrac{5x-2}{x+1}=\dfrac{5x+2}{x}\cdot\dfrac{x+1}{5x-2}=\dfrac{5x^2+7x+2}{5x^2-2x}$ ■

Ejercicios

Ejercicio 3.22 Simplificar

a) $\dfrac{ax^2}{a^2x^5}$

b) $\dfrac{x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$

c) $\dfrac{x^2+5}{x(x+5)^2}$

d) $\dfrac{x+x^2}{x^2+x^3}$

e) $\dfrac{4-x^2}{x-2}$

f) $\dfrac{9x^2-4}{9x^2-12x+4}$ ■

Ejercicio 3.23 Calcular

a) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+3}{x+2}$

b) $\dfrac{1}{x^2+10x+25}-\dfrac{1}{x+5}$

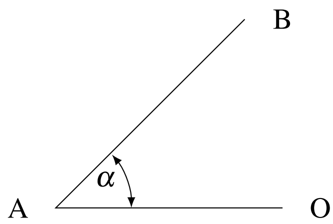
c) $\dfrac{4-x^2}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+4x+4}$

d) $\dfrac{x^2(x-1)}{x^2+5x+6}:\dfrac{x^2-x}{x^2-9}$ ■

4. Razones y funciones trigonométricas

4.1 Conceptos básicos

En geometría, un ángulo se define como el conjunto de puntos determinados por dos rayos o semirrectas, l_1 y l_2, que tienen el mismo punto extremo O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, como se observa en el diagrama, es el ángulo AOB, denotado como $\angle$AOB.

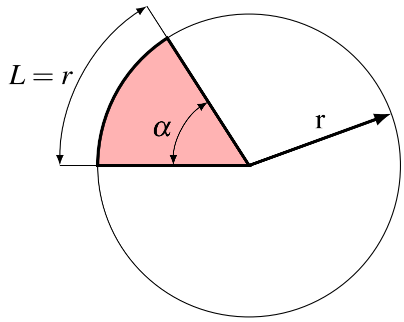


Una unidad de medida para los ángulos es el **grado**, es el sistema sexagesimal. El ángulo en posición estándar obtenido por una revolución completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, mide 360 grados, que se escribe 360°.

Un ángulo de 1° se obtiene al dividir una revolución en 360 partes iguales. Además, para medidas menores a un grado, se puede dividir el grado en 60 partes iguales para obtener los **minutos**, denotados por $'$. A cada minuto se lo puede dividir en 60 partes iguales para obtener los **segundos**, denotados po $''$. Luego

$$1^\circ = 60' \qquad 1' = 60''$$

Definición 4.1.1 Un ángulo de un radián es aquel que abarca un arco de circunferencia de longitud igual a la del radio. Se le llama sistema radial, y la representación gráfica se encuentra en la siguiente figura.



4.2 Relación entre el sistema sexagesimal y el sistema radial

Para hallar la relación entre la medida de un ángulo en radianes y en grados, se debe hallar en primer lugar, el número de veces que un arco de circunferencia de longitud r puede trazarse a lo largo de la circunferencia. Recordando que el perímetro de una circunferencia es $2\pi r$, el número de veces que r unidades se pueden trazar es 2π. Luego, un ángulo de 2π radianes es equivalente a $360°$. Por lo tanto, se obtienen las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
&360^\circ = 2\pi \text{ radianes}\\
&180^\circ = \pi \text{ radianes}\\
&1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \approx 0.0175 \text{ radián}\\
&1 \text{ radián} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57.2958^\circ\\
&\frac{\theta \text{ (en grados)}}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ (en radianes)}}{2\pi}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 4.1** Suponga que tiene un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianes. Halle el valor del ángulo en grados.
Sabiendo que $\frac{\theta \text{ (en grados)}}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ (en radianes)}}{2\pi}$ entonces,

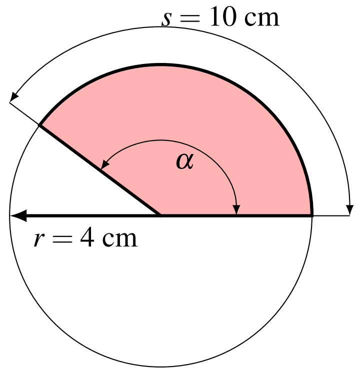
$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta \text{ (en grados)}}{360^\circ} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}\\
&\frac{\theta \text{ (en grados)}}{360^\circ} = \frac{\pi}{4 \cdot 2\pi}\\
&\frac{\theta \text{ (en grados)}}{360^\circ} = \frac{1}{8}\\
&\theta \text{ (en grados)} = \frac{1}{8} \cdot 360^\circ\\
&\theta \text{ (en grados)} = 45^\circ
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\frac{\pi}{4}$ radianes es equivalente a $45°$ ■

Notar que si un arco de longitud s de una circunderencia de radio r está determinado por un ángulo de medida α en el sistema radial,

$$s = r\alpha$$

■ **Ejemplo 4.2** En la figura, el ángulo central θ determina un arco de 10 cm de largo en una circunferencia de 4 cm de radio. Calcular la medida del ángulo en grados.



Sabiendo que $s = r\theta$ entonces,

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{s}{r} \\
&= \frac{10}{4} = 2.5
\end{aligned}
$$

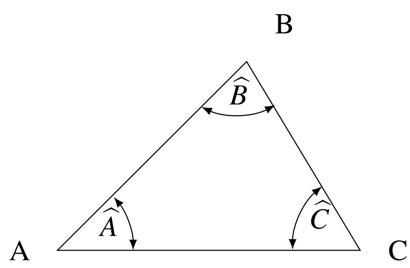
Este valor es el ángulo en radianes, por lo que hay que pasarlo a grados.

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta \text{ (en grados)}}{360^\circ} &= \frac{2.5}{2\pi} \\
\theta \text{ (en grados)} &= \frac{5}{4\pi} \cdot 360^\circ \\
\theta \text{ (en grados)} &= 143.24^\circ
\end{aligned}
$$

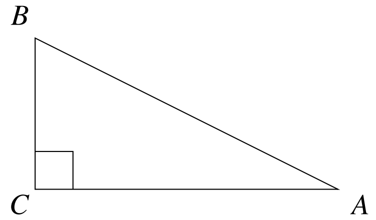
Por lo tanto, el ángulo es de 143.24°. ■

4.3 Razones trigonométricas

Sea un triángulo ABC, con ángulos interiores $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ y lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$



Teorema de Pitágoras: La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de su hipotenusa: $|\overline{AC}|^2+|\overline{CB}|^2=|\overline{AB}|^2$

Para un triángulo ABC rectángulo en $\widehat{C}$, como el que se observa en la figura anterior, se definen las **razones trigonométricas**: **seno**, **coseno** y **tangente** de un ángulo $\widehat{A}$ no recto de la forma

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\widehat{A} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AB}|}\\
\cos\widehat{A} &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}\\
\tan\widehat{A} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AC}|}
\end{aligned}$$

Notar que

$$\tan\widehat{A}=\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}$$

Relación pitagórica

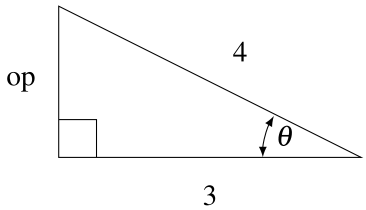
$$\operatorname{sen}^2\widehat{A}+\cos^2\widehat{A}=\left(\frac{|\overline{CB}|}{|\overline{AB}|}\right)^2+\left(\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}\right)^2=\frac{|\overline{AC}|^2+|\overline{CB}|^2}{|\overline{AB}|^2}=\frac{|\overline{AB}|^2}{|\overline{AB}|^2}=1$$

Los cálculos de las razones trigonométricas se realizarán con calculadora, y el resultado muchas veces será un número irracional, por lo que se utilizará una aproximación para expresar el resultado.

■ **Ejemplo 4.3** Sea θ un ángulo agudo y $\cos\theta=\frac{3}{4}$, hallar los valores de las funciones trigonométricas de θ.

Para resolver este ejercicio es conveniente trazar un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ. Por otro lado, por definición, $\cos\theta=\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$. Luego, como $\cos\theta=\frac{3}{4}$ se puede establecer que

$$\begin{gathered}\text{cateto adyacente} = 3\\ \text{hipotenusa} = 4\end{gathered}$$



Por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} 3^2 + (\text{op})^2 &= 4^2 \\ (\text{op})^2 &= 16 - 9 = 7 \\ op &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

Aplicando las definiciones previas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \cos\theta &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{4} \\ \tan\theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

■

4.3.1 Otras definiciones

- **Arco seno** de un número x: Dado $x \in [-1,1]$ el arco seno de x corresponde al ángulo θ cuyo seno es x: $\arcsin x = \theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = x$.
- **Arco coseno** de un número x: Dado $x \in [-1,1]$ el arco coseno de x corresponde al ángulo θ cuyo coseno es x: $\arccos x = \theta \Leftrightarrow \cos\theta = x$
- **Arco tangente** de un número x: Dado $x \in \mathbb{R}$ el arco seno de x corresponde al ángulo θ cuyo seno es x: $\arctan x = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = x$

Se definen también otras razones trigonométricas para el ángulo $\widehat{A}$, **cosecante**, **secante** y **cotangente**, de la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}\widehat{A} &= \frac{1}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \\ \sec\widehat{A} &= \frac{1}{\cos\widehat{A}} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \\ \cot\widehat{A} &= \frac{1}{\tan\widehat{A}} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \end{aligned}$$

■ **Ejemplo 4.4** Con los valores del Ejemplo 4.3, hallar los valores de las funciones trigonométricas cosecante, secante y cotangente de θ.

Recordando que

$$\begin{aligned} \text{cateto opuesto} &= \sqrt{7} \\ \text{cateto adyacente} &= 3 \\ \text{hipotenusa} &= 4 \end{aligned}$$

Aplicando las definiciones previas:

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$
$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{4}{3}$$
$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

■

Ejercicios

Ejercicio 4.1 Encuentre la medida del ángulo en radianes

a) 150°
b) 225°
c) 120°
d) 100°
e) 210°
f) -60°

■

Ejercicio 4.2 Encuentre la medida del ángulo en términos de grados, minutos y segundos.

a) $\frac{2\pi}{3}$
b) $\frac{11\pi}{6}$
c) $\frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{11\pi}{4}$
e) $-\frac{7\pi}{4}$
f) 7π

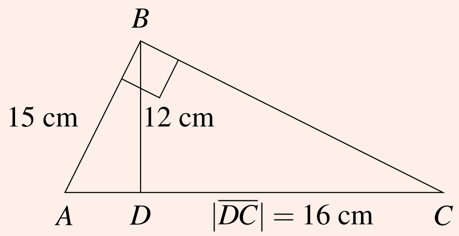
■

Ejercicio 4.3 Si un arco de circunferencia de longitud s está dado por un ángulo central θ, hallar el radio de circunferencia.

a) $s = 10$ cm, $\theta = 4$
b) $s = 3$ km, $\theta = 20^\circ$

■

Ejercicio 4.4 Calcular las razones trigoométricas de los ángulos $\widehat{A}, \widehat{C}, A\widehat{B}D$ y $C\widehat{B}D$ del siguiente triángulo y completar la tabla.



θ	$\widehat{A}$	$\widehat{C}$	$A\widehat{B}D$	$C\widehat{B}D$
$\operatorname{sen}\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

■

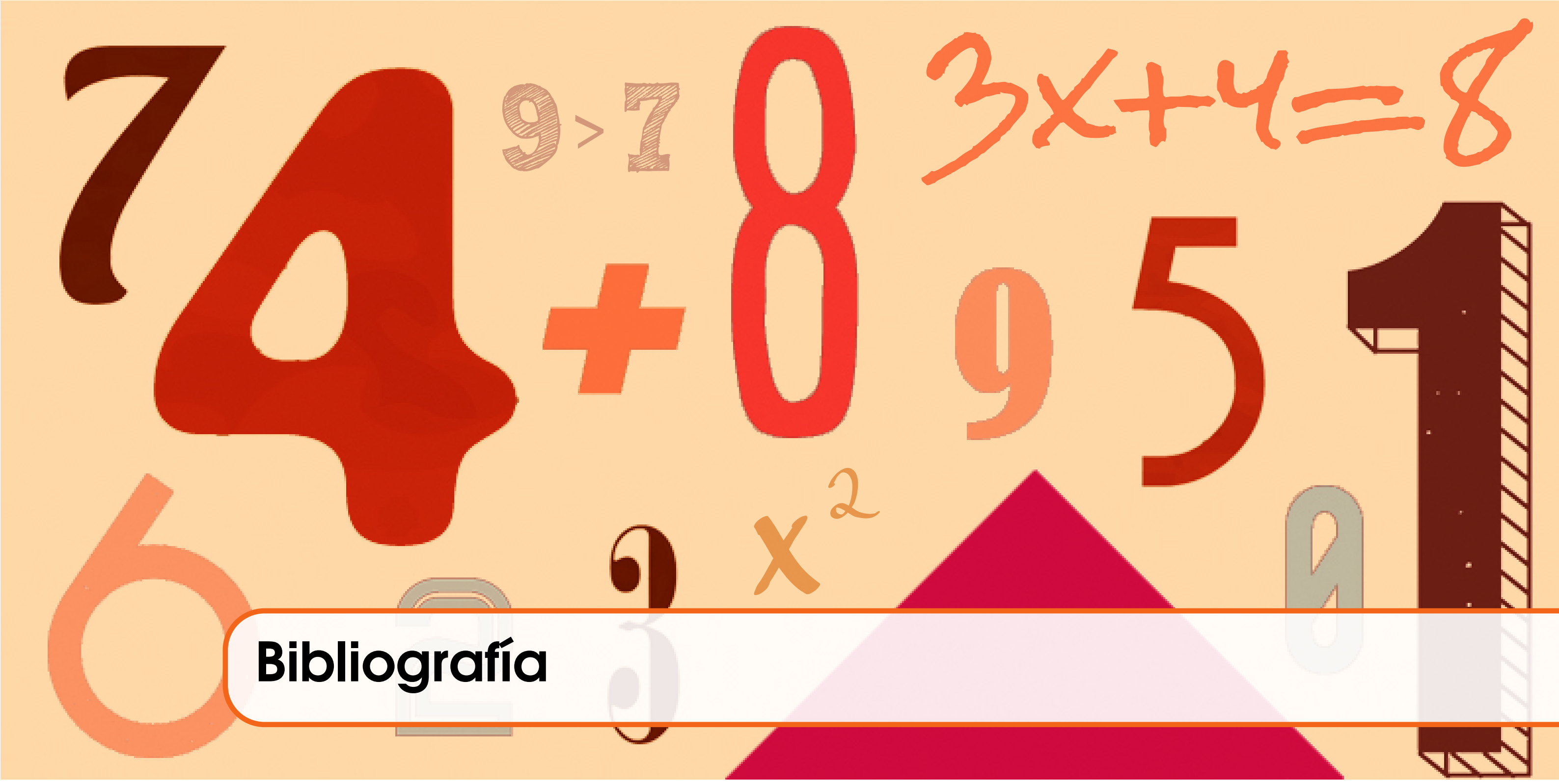
Ejercicio 4.5 Hallar los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo si se sabe que la diferencia entre los dos es de 40 grados. ■

Ejercicio 4.6 Hallar la longitud de la sombra de un árbol de 12 m de altura cuando los rayos del sol forman con la horizontal un ángulo de 20° ■

Ejercicio 4.7 Desde un cierto lugar a nivel del suelo Juan ve la terraza de un edificio con un ángulo de elevación de 60°. Si se aleja 20 m del edificio, el ángulo de elevación es de 30°. Hallar la altura del edificio. ■

Ejercicio 4.8 En la llanura desde un punto se mide el ángulo de elevación a una montaña y se obtiene que es 35°. Acercándose a la montaña una distancia de 2000 m se vuelve a medir el ángulo y se obtiene que es 55°. ¿Cuál es la altura de la montaña? ■

Ejercicio 4.9 Miguel desea calcular la altura de dos edificios que están situados a 100 metros el uno del otro. Como tiene acceso al edificio más alto, A, observa que desde la terraza de dicho edificio se avista la terraza del otro, B, bajo un ángulo de $\alpha = 73.3°$. Desde la base del mismo edificio A, se ve la terraza del otro edificio B a un ángulo de $\beta = 19.29°$. ¿Puede Miguel calcular la altura de los edificios con los tres datos con los que cuenta? En caso afirmativo, ¿cuál es la altura de cada uno? ■



Bibliografía

Libros

[*]

[1] *Curso de Nivelación*. Departamento de Matemática, UNS, 2014.

[2] *Curso de Nivelación. Matemática. Notas Teóricas y Guía de Actividades.* Departamento de Matemática, UNS, 2017.

[3] Ruth Martínez Valenzuela et al. *Matemática para ingresantes*. 4th ed. UNSL, 2008.

[4] Earl Swokowski and Jeffery Cole. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. 12th ed. Cengage Learning Editores, 2009.

CICLO
DE INICIO
UNIVERSITARIO
2020

Universidad Nacional
de Río Negro

unrn.edu.ar